



**MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Rapport du jury

Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2020

Rapport de jury présenté par : Thierry GOUDON
Président du jury

Table des matières

1	Introduction	3
2	Déroulement du concours et statistiques	5
2.1	Déroulement du concours	5
2.2	Statistiques sur la session 2020	6
3	Épreuve écrite de mathématiques	10
3.1	Commentaires sur l'épreuve écrite	10
3.2	Corrigé de l'épreuve écrite	14
A	Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2021	40

Les rapports des jurys des concours sont établis sous la responsabilité des présidents de jury.

Chapitre 1

Introduction

Ce rapport est consacré au déroulement de la session 2020 du concours externe spécial, réservé aux docteurs, de l'agrégation de mathématiques. Quatrième édition de ce concours spécial, cette session est marquée par la crise sanitaire de la COVID-19 qui a conduit à faire de l'épreuve écrite le seul et unique élément de décision pour l'admission.

Ce concours obéit aux mêmes exigences scientifiques que le concours externe standard, sans aucune concession quant aux connaissances mathématiques et leur maîtrise. Il en reprend d'ailleurs le même programme, disponible à l'URL https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externespecial_21/21/1/p2021_agreg_ext_spe_math_1287211.pdf ou sur agreg.org. Cependant, le contour et l'esprit des épreuves sont destinés à mettre en valeur le parcours des candidats, leur expérience professionnelle et leur aptitude à mener une démarche de recherche. Ce concours permet ainsi de recruter des professeurs agrégés ayant une pratique des mathématiques de haut niveau, des compétences pluridisciplinaires, souvent marquées par la confrontation à un environnement international ou industriel. Ce vécu est appelé à s'exprimer au concours et ne peut que rejaillir positivement sur la pratique enseignante. L'expérience montre que cette voie de recrutement est très ouverte et permet de valoriser — moyennant un indispensable effort de préparation — des candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline que les mathématiques.

Le jury recommande aux futurs candidats de tous profils, ainsi que les centres de préparation et leurs intervenants, de faire une lecture attentive des rapports des sessions antérieures et à bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. La consultation du rapport du concours standard, plus détaillé sur les attentes des épreuves d'admission, en est un complément indispensable. Le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques agreg.org fournit de nombreuses informations utiles, des archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la **ClefAgreg** qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Se préparer suffisamment tôt à cette épreuve permet d'en bien comprendre les attendus, mais aussi peut aider à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs et aux candidats, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le concours externe, spécial comme standard, de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation. Il convient de souligner que les possibilités de nomination

comme stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréats du concours spécial. Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016).

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

L'épreuve écrite d'admissibilité était prévue le 19 Mars 2020, les épreuves orales du 19 juin au 4 juillet. Le confinement annoncé le lundi 16 mars 2020 par le président de la République a conduit à la suspension de ce calendrier. Le 15 avril le ministère a annoncé une série d'aménagements exceptionnels se traduisant, pour ce concours, par la suppression des épreuves orales, et transformant l'épreuve écrite en épreuve d'admission. Il était aussi annoncé la mise en place d'une procédure spécifique de titularisation, autour d'un oral organisé un an après le concours. Dès que possible, le jury a ouvert sur agreg.org une « FAQ-session 2020 » pour diffuser au mieux les informations disponibles. En particulier, la possibilité de modifier les sujets n'a jamais été envisagée et ce point était précisé sur le site : les candidats ont été évalués sur des sujets tout à fait conformes à la lignée des années précédentes. L'épreuve s'est finalement déroulée le 24 juin, sur le sujet prévu. La délibération s'est tenue le 23 juillet, concomitamment avec celle du concours standard. Décider de l'admission au vu des résultats d'une unique épreuve écrite, adaptation à une situation exceptionnelle, n'est pas sans incidence. On pouvait penser, compte tenu de la richesse du parcours de ces candidats ayant souvent, en plus de leur expertise mathématique, une expérience d'enseignement dans le supérieur, que la prise de risque était néanmoins mesurée.

Format du sujet. Le sujet du concours spécial est organisé en deux parties :

- Une série d'exercices, de niveau L, qui balayent l'ensemble du programme. Cette partie de l'épreuve doit monopoliser environ le tiers du temps imparti. Cette année 6 exercices étaient proposés, 2 orientés analyse, 2 orientés algèbre et les deux derniers faisaient appel aux probabilités.
- Un problème à choisir parmi deux sujets, l'un sur des thèmes d'Analyse-Probabilités, l'autre sur des thèmes d'Algèbre et Géométrie. Il est attendu des candidats qu'ils traitent une partie substantielle de l'un de ces problèmes auquel ils devraient consacrer au moins la moitié du temps.

Ce format sera repris en 2021, avec les mêmes directives.

Compte tenu du volume relativement faible du concours, concentré donc sur une seule épreuve, le suivi renforcé rendu nécessaire par la crise sanitaire a pu être organisé simplement.

De fait, cette session 2020 s'est avérée d'une qualité d'ensemble extrêmement décevante qui n'a pas permis de déclarer admis plus de 7 candidats, sur les 16 postes ouverts au concours. Le jury estime que la maîtrise disciplinaire manifestée sur cette épreuve, et pour laquelle on ne pourrait avoir de moindre exigence que pour le concours standard, ne permet pas de proposer une liste plus fournie. Ce constat négatif ne doit cependant rien enlever aux mérites des candidats retenus dont les prestations sont, quant à elles, tout à fait satisfaisantes. Le major du concours a rendu une copie excellente, notée

20/20 ; avec toute la mesure nécessaire à ce type de comparaison, les trois premiers ont fait preuve d'un niveau qui devrait leur permettre de figurer parmi les 100 premiers du concours standard. Mais les notes des candidats classés au-delà de la 12ème place sont inférieures à 5/20. La faiblesse de ces résultats pour des titulaires d'une thèse dont certains ont enseigné ou enseignent encore dans des filières mathématiques du supérieur, est très préoccupante.

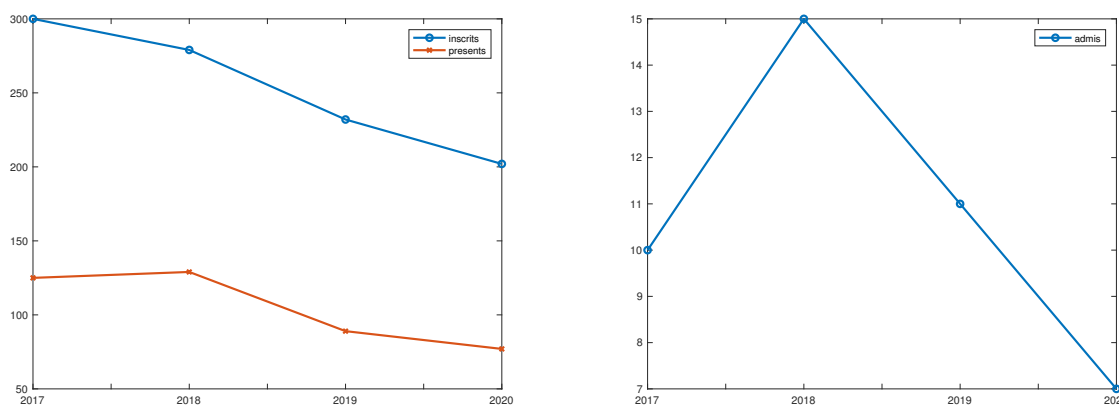
Rang	Note
1	20
1-3	20-12
1-5	20-10
5-7	10-7,5
8-12	6,5-5,5
13-77	5-0

Répartition des notes

Le jury a été particulièrement vigilant à ce que les candidats manifestent une compétence suffisante sur l'ensemble du programme : si le problème invite les candidats à s'exprimer sur leurs thèmes de prédilection, les exercices préliminaires ont précisément la vocation de vérifier les connaissances de base sur un éventail large. Aussi, se focaliser sur les seuls exercices relevant du même thème que le problème choisi est une stratégie immédiatement démasquée et que le jury ne peut absolument pas cautionner. Cette esquive des difficultés témoigne d'une faiblesse disciplinaire irrémédiablement rédhibitoire.

2.2 Statistiques sur la session 2020

Le nombre d'inscrits s'élève à 202 candidats dont seulement 77 étaient présents à l'épreuve. Ces données sont en baisse constante depuis la création du concours. Elles sont à rapprocher des 205 candidats inscrits et 76 présents au concours standard qui se déclarent titulaires d'un doctorat. Cette tendance est curieuse dans la mesure où la réussite à l'un ou l'autre des deux concours ne procure aucun avantage en termes de carrière et que ce concours spécial a vocation à tirer le meilleur parti du parcours des candidats. Parmi les candidats présents, 2 étaient dispensés de diplômes (parents de 3 enfants ou plus), mais ils n'ont pas été retenus parmi les admis.



Évolution du nombre d'inscrits, présents et admis

Académie	Inscrits	Présents	Admis
PCV	58	17	1
AIX-MARSEILLE	13	6	
NICE	12	6	2
TOULOUSE	11	3	
GRENOBLE	10	2	
LILLE	9	6	1
BORDEAUX	8	2	2
LYON	8	5	
NANCY-METZ	7	5	
POITIERS	7	2	
ROUEN	6	2	
MONTPELLIER	5	2	
NANTES	5	2	
CAEN	4		
RENNES	4		
STRASBOURG	4	3	
ORLEANS-TOURS	4	2	
REIMS	4	3	
AMIENS	4	1	
GUADELOUPE	4	2	
DIJON	3	1	1
MAYOTTE	3	1	
BESANCON	2	2	
CLERMONT-FERRAND	2	1	
LA REUNION	2	1	
GUYANE	1		
NOUVELLE CALEDONIE	1		
POLYNESIE FRANCAISE	1		

Répartition suivant l'académie aux différentes étapes du concours

Age	Inscrits	Présents	Admis
25	1		
28	5	3	1
29	3	1	
30	9	5	1
31	9	5	
32	6	3	
33	10	3	
34	12	3	
35	14	5	
36	7	3	1
37	11	6	1
38	14	4	1
39	3	1	
40	5	3	1
41	6	3	
42	4	1	
43	3	2	
44	9	2	
45	4		
46	10	5	
47	5	2	
48	3		
49	3	2	1
50	8	1	
51	4		
52	9	4	
53	5	3	
54	1		
55	3	2	
56	6	1	
57	1		
58	3	2	
59	4	2	
61	1		
64	1		

Répartition suivant l'âge aux différentes étapes du concours

Profession	Inscrits	Présents	Admis
CERTIFIE	75	33	1
SANS EMPLOI	30	10	3
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	18	4	
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	14	5	1
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	10	5	1
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	10	3	
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	5	3	
PLP	4		
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	4	2	
MAITRE AUXILIAIRE	3	2	
AGREGE	3	1	
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	3		
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	2	2	
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	2	1	
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	2		
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	2	1	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	2	1	
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	2		
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	1	1	
PROFESSEUR ECOLES	1		
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	1		
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	1		
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	1	1	
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	1	1	
PERS FONCTION PUBLIQUE	1		
PROFESSIONS LIBERALES	1	1	1
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	1		
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	1		
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	1		

Répartition suivant la profession aux différentes étapes du concours

En dépit de son déroulement totalement inédit, la session 2020 confirme que ce concours est complètement ouvert. En effet, le profil scientifique des meilleurs 15 % des candidats est très varié, avec des thèses en

- théorie des jeux et mathématiques financières,
- cohomologie de Galois,
- analyse fonctionnelle,
- géométrie numérique,
- contrôle et géométrie,
- géométrie,
- cryptographie,
- physique théorique
- physique de l'atmosphère,
- astrophysique.

En termes d'ancienneté, parmi ces candidats significatifs, 4 ont soutenu leur thèse entre 2017 et 2020, deux entre 2014 et 2016 et 6 ont une thèse antérieure à 2013, la plus ancienne remontant à 2003.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques

Le sujet est disponible à l'URL https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externespecial/94/3/s2020_agreg_externespec_math_1302943.pdf ou sur le site agreg.org.

3.1 Commentaires sur l'épreuve écrite

Le sujet se compose de six exercices couvrant un large spectre de mathématiques de niveau licence, suivis d'un problème au choix du candidat. Le premier problème proposé (algèbre et géométrie) porte sur les notions de groupe dérivé et de résolubilité. Le second problème proposé (analyse et probabilités) porte sur les équations différentielles non linéaires.

Exercices

- Le premier exercice permettait d'évaluer les compétences des candidats en analyse réelle élémentaire : raisonnement sur les limites « avec des ε », convergence d'une série numérique puis d'une série de fonctions. Le jury n'a pu que constater la faiblesse de la maîtrise de ces notions chez un très grand nombre de candidats. *Il appelle les futurs candidats à consolider très sérieusement leur maîtrise des bases de l'analyse.*

Dans la première question, la majorité des candidats a compris qu'il fallait écrire une preuve sur le modèle de celle du théorème de CESARO, dont ils connaissent bien le principe. Toutefois la mise en œuvre concrète du raisonnement est souvent imparfaite.

La deuxième question au contraire n'a presque jamais été traitée correctement. Le théorème de sommation des équivalents (si deux séries à termes positifs divergentes ont leurs termes généraux équivalents, alors leurs sommes partielles sont équivalentes) semble inconnu de la presque totalité des candidats.

La troisième question n'a pas été mieux réussie que la deuxième, faute de savoir manipuler une somme double et d'écrire une majoration très simple, ou bien à cause de confusions conceptuelles (certains candidats ne distinguent pas la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et celle de la série $\sum v_n$, d'autres parlent de suite absolument convergente... Il s'agit pourtant de notions de niveau L1).

La dernière question a été un peu mieux réussie mais le jury constate avec regrets que la compréhension de la notion de convergence uniforme d'une série de fonctions est extrêmement fragile chez une large part des candidats.

- Le deuxième exercice portait sur l'intégration (de fonctions continues sur un segment). C'est le moins réussi des six exercices, une constatation alarmante pour un thème aussi important, étudié dès la première année de licence.

Moins d'un candidat sur dix résout la première question. La seconde question, qui est en fait un exercice très classique de licence, a principalement donné lieu à des réponses fantaisistes. On a lu dans de trop nombreuses copies que « la fonction f est continue donc dérivable », ou encore que « la fonction g est croissante et majorée par M donc elle converge vers M ». Ces erreurs grossières du niveau d'un élève de terminale ont laissé le jury pantois.

- Le troisième exercice portait sur l'algèbre linéaire de niveau L1-L2 et les groupes (dans la dernière question). Un nombre significatif de candidats est parvenu à résoudre les questions a et b d'algèbre linéaire et on a lu ici globalement moins de réponses invraisemblables que dans les exercices d'analyse. Une subtilité a échappé à de nombreux candidats insuffisamment soigneux : si G est un groupe et H un sous-groupe de G , il n'y a pas de raison a priori que le centre $Z(H)$ de H soit égal à $Z(G) \cap H$ (penser à un sous-groupe monogène d'un groupe de centre trivial). Il se trouve que l'égalité a lieu pour $GL(E)$ et $SL(E)$ mais il fallait le démontrer.

- Le quatrième exercice faisait appel aux connaissances des candidats sur les rangs de matrices, les déterminants et la topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. La majorité des candidats connaissent la relation $A \times {}^t\text{Com}(A) = (\det A)I_n$, mais la capacité à en déduire des informations sur le rang est assez variable. En outre les propriétés concernant le rang des matrices extraites sont parfois mal comprises.

La question de topologie c.(i), très classique, a été bien réussie par les candidats qui l'abordent.

- Le cinquième exercice mêlait analyse (intégration) et probabilités, afin de donner une élégante preuve probabiliste de l'injectivité de la transformation de LAPLACE des fonctions continues et bornées.

La première question (dérivation sous le signe intégrale) a été traitée dans beaucoup de copies mais rarement de façon satisfaisante, trois copies seulement obtenant tous les points. Quelques candidats ne savent même pas qu'il convient de faire appel à un théorème du cours pour dériver sous le signe intégrale. Parmi ceux qui connaissent ledit théorème, très peu ont su fournir une domination correcte. Plus grave, un nombre important de candidats se trompent en dérivant par rapport à s : la dérivée partielle de $f(x)e^{-sx}$ ne saurait être $-sf(x)e^{-sx}$ (ni par rapport à s ni par rapport à x !) Une telle erreur est rédhibitoire pour un candidat à un poste de professeur de lycée.

Le jury appelle en outre l'attention des futurs candidats sur l'usage indispensable des valeurs absolues en analyse. Pour montrer l'intégrabilité, il ne suffit pas d'écrire l'inégalité $f(x)e^{-sx} \leq Me^{-sx}$, il convient de majorer $|f(x)e^{-sx}|$, ce que beaucoup omettent de faire. La même remarque s'applique à l'exercice 1 avec $v_n - \ell$ au lieu de $|v_n - \ell|$.

- Le sixième et dernier exercice faisait intervenir des probabilités et de l'algèbre bilinéaire. Il a été très peu réussi.

Le jury rappelle l'importance prise par les probabilités dans l'enseignement des mathématiques dès le lycée. Les candidats ne doivent pas faire l'impasse sur ce thème. Les exercices 5 et 6 faisaient appel aux notions suivantes : linéarité de l'espérance, variance, bilinéarité de la covariance, loi exponentielle, expression de la densité d'une somme de v.a. i.i.d., loi des grands nombres.

Problème d'algèbre et géométrie

La première partie du problème alternait le passage en revue des propriétés élémentaires des groupes dérivés et des groupes résolubles et l'examen de quelques exemples simples.

La seconde partie était consacrée à des exemples plus consistants. La section II.A portait sur le groupe $SL_2(K)$ (lorsque $|K| \geq 4$), on y démontrait que $D(SL_2(K)) = SL_2(K)$ et l'on constatait que les éléments du groupe dérivé de $SL_2(\mathbf{R})$ ne sont pas tous des commutateurs.

La section II.B faisait étudier à l'aide d'outils algébriques (groupes, algèbre bilinéaire) et topologiques le groupe de LORENTZ $O_{1,3}(\mathbf{R})$ et son groupe dérivé. À tout élément $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in O_{1,3}(\mathbf{R})$ sont associés deux signes : $\det A = \pm 1$ et $\varepsilon(A) = \frac{a_{11}}{|a_{11}|}$, le second indiquant si A est une transformation de l'espace-temps de MINKOWSKI qui conserve ou renverse le sens du temps. Ces deux signes déterminent les quatre composantes connexes de $O_{1,3}(\mathbf{R})$; celle contenant l'identité est égale au groupe dérivé $D(O_{1,3}(\mathbf{R}))$, isomorphe (et homéomorphe) à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.

La section II.C s'intéressait à un groupe orthogonal sur un corps fini. Sur le corps \mathbb{F}_q (q impair), en dimension 2, il y a deux classes de formes quadratiques non dégénérées qui donnent naissance à deux groupes orthogonaux non isomorphes (il en va de même en toute dimension paire, tandis qu'en dimension impaire les deux groupes se trouvent être isomorphes). On étudiait ici le groupe $O(Q)$ associé à une forme quadratique anisotrope sur le plan \mathbb{F}_q^2 dont le discriminant est l'opposé d'un non carré α . Alors $\mathrm{SO}(Q)$ s'identifie au groupe des éléments de norme 1 de l'extension quadratique $L = \mathbb{F}_q[\sqrt{\alpha}]$; par conséquent il est cyclique et $O(Q)$ est diédral, d'ordre $2(q+1)$.

La troisième partie du sujet, jointe aux dernières questions de la partie I, donnait la preuve d'un fameux théorème de BURNSIDE : si p et q sont deux nombres premiers, tout groupe fini d'ordre $p^\alpha q^\beta$ est résoluble. Cette démonstration fait intervenir les entiers algébriques, dont on établissait les principales propriétés dans la section III.A, ainsi qu'un raisonnement assez fin sur les représentations irréductibles d'un groupe fini et leurs caractères, qui faisait l'objet de la toute dernière section III.B du problème.

Les parties II.B et III ont été très peu abordées dans les copies. Les sections II.A et II.C ont eu un peu plus de succès.

Seuls deux très bons candidats ont réussi à traiter une large part de ce problème, ce qui leur a permis de mettre en évidence leurs capacités de compréhension et de raisonnement dans des contextes mathématiques non triviaux.

Chez les candidats moins solides, on constate souvent des lacunes sur des notions élémentaires. Ainsi, il n'est pas vain de rappeler que dans un groupe G , le sous-groupe engendré par une partie A de G est constitué de tous les produits possibles $a_1 \dots a_k$ qu'on peut former avec des éléments de A et leurs inverses (les inverses sont souvent oubliés).

Un nombre important de candidats raisonnent comme si le sous-groupe dérivé, engendré par les commutateurs, était égal à l'ensemble des commutateurs. Cette erreur fréquente n'a certes pas surpris le jury, bien que l'énoncé fournisse un contre-exemple à la question 13 ($-I_2$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$), lequel n'a pas suffi à détromper les candidats.

Quant aux candidats les plus faibles, ils éprouvent de grandes difficultés dès les toutes premières questions. Dans le groupe symétrique \mathfrak{S}_n , on peut déterminer le conjugué d'une transposition : $\varphi \circ (i j) \circ \varphi^{-1} = (\varphi(i) \varphi(j))$, sans qu'il soit nécessaire d'examiner tous les cas possibles pour φ (question 1.a). En 1.b, le jury est surpris de voir que certains candidats, calculant le commutateur des transpositions (1 2) et (1 3), obtiennent une transposition, alors même qu'ils ont écrit quelques lignes plus haut qu'un commutateur est une permutation paire... *La cohérence logique et le caractère sensé des réponses sont des éléments importants d'appréciation des copies.*

Problème d'analyse

Les trois premières parties étaient consacrées à l'étude de la dynamique de systèmes différentiels autonomes $x'(t) = F(x(t))$ dans \mathbf{R}^d . Dans la première partie, on définissait le flot d'un tel système et l'on étudiait ses propriétés. Le principal outil est le lemme de GRÖNWALL, qui faisait l'objet des deux premières questions. Le jury déplore le trop petit nombre de candidats capables d'en fournir une démonstration convaincante, alors même que l'énoncé donnait toutes les indications nécessaires. Les candidats qui savent faire se démarquent très vite; chez les autres toutes les énormités semblent

bonnes pour parvenir coûte que coûte au résultat. Certains n'hésitent pas à dériver une inégalité. Chez d'autres candidats, le raisonnement se réduit à un coup de poker : « la solution de $f' = af + b$ est $f(t) = e^{at}(\dots)$; j'en déduis que si $f' \leq af + b$ alors $f(t) \leq e^{at}(\dots)$ ». Pour établir ensuite la version vectorielle du lemme de GRÖNWALL, beaucoup pensent à tort que la dérivée de $t \mapsto \|f(t)\|$ est $t \mapsto \|f'(t)\|$, ce qui n'est pourtant pas vraisemblable, sans quoi la fonction $\|f\|$ ne pourrait jamais décroître !

La question 2 demandait de rappeler la définition d'une solution maximale et d'énoncer le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Ce fut une grande déception pour les correcteurs : les définitions sont le plus souvent très vagues (« une solution ne pouvant être prolongée ») et l'énoncé proposé est rarement convaincant, bien qu'on ait accepté ici n'importe quelle version susceptible de s'appliquer aux systèmes différentiels considérés dans le problème. Quelques candidats ne connaissent que le théorème s'appliquant à des équations différentielles linéaires. Cette question a donc été particulièrement discriminante : le jury attend que les futurs professeurs de mathématiques soient capables d'énoncer avec une parfaite précision les définitions et théorèmes usuels. Il y a beaucoup de progrès à accomplir sur ce point.

Le raisonnement qualitatif très classique des questions 3.b-c, consistant à prolonger une solution ayant une limite finie en une borne finie de son intervalle de définition, est une technique de base que la grande majorité des candidats n'a pas du tout comprise.

À la question 4, s'est manifestée la confusion, pour une fonction à deux variables t, x , entre la continuité par rapport à (t, x) et la continuité partielle par rapport à chacune des variables.

La fin de la partie I, consacrée à établir le caractère attractif d'un point d'équilibre où le système linéarisé est à valeurs propres de parties réelles < 0 , a été peu traitée.

Dans la seconde partie, on étudiait en détail l'équation du pendule simple et sa période d'oscillation en régime sous-critique. Seules les questions les plus faciles ont été (un peu) abordées.

La question 8, une application immédiate du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, a été fort peu réussie, ce qui n'est guère étonnant vu la méconnaissance de ce théorème.

La question 10 demandait d'établir l'intégrale première de l'équation du pendule simple non amorti. Certains candidats raisonnent à l'envers : ils partent de l'intégrale première, dérivent et retrouvent l'équation différentielle. Il fallait bien entendu procéder en sens inverse.

La question 12 se réduisait à un calcul de deux lignes très facile. Malgré tout, moins de la moitié des candidats ayant abordé cette question obtient la bonne constante A .

La partie II.C portait sur l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et servait de prétexte pour faire un peu d'analyse complexe. Ces questions n'ont presque pas été abordées.

La troisième partie introduisait la notion de conjugaison topologique de flots. Après quelques exemples élémentaires (III.A), la sous-partie III.B visait à établir un résultat de conjugaison global entre le flot linéaire $\phi_t(x) = e^{tA}x$ associé à une matrice A dont 0 est un point d'équilibre attractif et le flot non linéaire associé à un champ de vecteur $f = A + g$, où g est une petite perturbation. On démontrait en fait un résultat un peu plus fort : le flot de f est conjugué à celui de $-\text{Id}$. Ces résultats étaient obtenus par des moyens entièrement élémentaires (calcul différentiel et topologie dans \mathbf{R}^d).

Enfin dans la quatrième partie, on s'intéressait à un problème discret analogue : la conjugaison topologique de difféomorphismes de \mathbf{R}^d , en démontrant par des arguments plus abstraits (reposant sur une méthode de point fixe contractant dans un espace de BANACH), un résultat de conjugaison globale pour des difféomorphismes ayant un unique point fixe hyperbolique, de la forme $f = A + g$ avec A un isomorphisme linéaire dont les valeurs propres sont de module différent de 1, et g une petite perturbation non linéaire.

Les résultats des parties III et IV sont des cas particuliers du théorème de GROBMAN-HARTMAN, lequel aboutit, sous des hypothèses purement locales, à un résultat de conjugaison topologique locale entre

un système dynamique (discret ou continu) et son linéarisé au voisinage d'un point fixe hyperbolique. Le cœur de la preuve de ce théorème est en fait le contenu de la partie IV du présent problème.

Ces parties III et IV n'ont pas du tout été abordées par les candidats.

Dans l'ensemble, ce problème, choisi par un nombre important de candidats, a donné lieu à des résultats extrêmement décevants. Le problème est traité superficiellement et rares sont ceux qui dépassent le début de la partie II. Ici encore les lacunes des candidats dans la maîtrise des bases de l'analyse apparaissent comme un handicap majeur.

3.2 Corrigé de l'épreuve écrite

Exercice 1

a. Il s'agit d'une variante du théorème de CESARO ; il suffit d'adapter la preuve.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$, d'où, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \frac{(u_0 - \ell) + \dots + 2^n(u_n - \ell)}{1 + \dots + 2^n} \right| \leq \frac{1}{1 + \dots + 2^n} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} 2^k |u_k - \ell| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^n 2^k \right) \\ &\leq \frac{A(n_0)}{1 + \dots + 2^n} + \varepsilon \end{aligned}$$

où $A(n_0)$ ne dépend pas de n . À partir d'un certain rang n_1 , on a $A(n_0) \leq 2^n$, d'où, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, $|v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$, cqfd.

b. Il suffit d'écrire

$$(n+1)2^{n+1} - n2^n = (n+2)2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n2^n \sim 2^n u_n ;$$

la série $\sum (n+2)2^n$ est à termes positifs et divergente, on peut appliquer le théorème de sommation des équivalents. Il vient

$$(n+1)2^{n+1} = \sum_{k=0}^n \left((k+1)2^{k+1} - k2^k \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$$

d'où

$$v_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1} \sum_{k=0}^n 2^k u_k \sim n.$$

c. Pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^N |v_n| \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k |u_k| = \sum_{k=0}^N |u_k| \sum_{n=k}^N \frac{1}{2^{n-k}} \leq \sum_{k=0}^N 2 |u_k| \leq 2 \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

d'où la convergence de $\sum |v_n|$.

d. La convergence simple de $\sum V_n(x)$ résulte de c.

La série $\sum V_n(x)$ ne peut converger uniformément sur $] -1, 1[$ attendu que son terme général ne tend pas uniformément vers 0 : on constate en effet que $\sup_{x \in] -1, 1[} |V_n(x)| = 1$ pour tout n .

Si $a < 1$, la série converge normalement sur $[-a, a]$ en effet $\sup_{x \in [-a, a]} |V_n(x)| = V_n(a)$ et la série $\sum V_n(a)$ converge. La série de fonctions converge donc uniformément sur tout segment inclus dans $] -1, 1[$.

Exercice 2

a. Soit $0 < x < y$, $p = y/x > 1$ et q l'exposant conjugué de p , on a

$$\int_0^1 f^x \times 1 \leq \left(\int_0^1 f^{xp} \right)^{1/p} \left(\int_0^1 1^q \right)^{1/q} = \left(\int_0^1 f^y \right)^{1/p}$$

d'où $g(x) \leq g(y)$.

Autre solution : appliquer l'inégalité de JENSEN avec la fonction convexe $\phi : u \mapsto u^{y/x} : \phi(\int_0^1 f^x) \leq \int_0^1 \phi \circ (f^x)$, ce qui redonne exactement $g(x) \leq g(y)$.

b. La fonction f atteint son maximum en un point t_0 de $[0, 1]$ et étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver par continuité un segment $[a, b]$ non trivial contenant t_0 sur lequel $f \geq M - \varepsilon$. Alors pour tout $x > 0$,

$$(b-a)^{1/x}(M-\varepsilon) \leq \left(\int_a^b f(t)^x dt \right)^{1/x} \leq g(x) \leq M.$$

Le minorant tend vers $M - \varepsilon$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc pour x assez grand il est $\geq M - 2\varepsilon$, ce qui donne : $\exists A > 0, \forall x \geq A, |g(x) - M| \leq 2\varepsilon$.

Exercice 3

a. (i) Soit $x \in E$ non nul, u commute avec le projecteur p sur la droite $D = \mathbf{R}x$ parallèlement à un supplémentaire de D , donc u stabilise $\text{Im } p = D$. Par conséquent x est un vecteur propre de u .

(ii) Argument très classique : pour tout $x \in E$ non nul, il existe $\lambda_x \in \mathbf{R}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$; on montre que $\lambda_x = \lambda_y$ pour tous x et y , en distinguant 2 cas selon que x et y sont liés ou non.

b. Soit $u \in Z(\text{GL}(E))$. Soit p un projecteur et $v = p + \text{Id}$; en écrivant par exemple la matrice de v dans une base de diagonalisation de p , on constate que $\det v = 2^{\text{rg}(p)} \neq 0$, donc v est inversible. Alors v commute avec u , par suite p commute avec u , et par la question a, u est une homothétie. On conclut que $Z(\text{GL}(E)) = \{k \text{Id} \mid k \in \mathbf{R}^*\}$.

Pour $Z(\text{SL}(E))$, on fait de même avec $v = \alpha(p + \text{Id})$, en choisissant α de sorte que $v \in \text{SL}(E)$ ($\alpha = \det(p + \text{Id})^{-1/n} = 2^{-\text{rg}(p)/n}$ convient). On conclut comme précédemment et $Z(\text{SL}(E)) = \{\text{Id}\}$ si n est impair, $\{\pm \text{Id}\}$ si n est pair.

c. Si n est pair, les centres des groupes $\text{GL}(E)$ et $\text{SL}(E) \times \mathbf{R}^*$ ne sont pas isomorphes :

$$Z(\text{GL}(E)) \simeq \mathbf{R}^*, \quad Z(\text{SL}(E) \times \mathbf{R}^*) = Z(\text{SL}(E)) \times Z(\mathbf{R}^*) \simeq \{\pm 1\} \times \mathbf{R}^*$$

\mathbf{R}^* contient un seul élément d'ordre 2 (c'est -1), tandis que $\{\pm 1\} \times \mathbf{R}^*$ en contient trois : $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. Les centres ne sont donc pas isomorphes et par suite $\text{GL}(E)$ et $\text{SL}(E) \times \mathbf{R}^*$ ne sont pas isomorphes.

Si n est impair, on vérifie que la fonction

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{SL}(E) \times \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \text{GL}(E) \\ (u, \lambda) & \longmapsto & \lambda u \end{array} \right)$$

est un isomorphisme de groupes, de réciproque $v \mapsto ((\det v)^{-1/n} v, (\det v)^{1/n})$.

Exercice 4

a. On utilise l'égalité (*) : ${}^t A \times \text{Com}(A) = \det(A) I_n$.

— Si A est inversible, sa comatrice aussi d'après (*).

- Si $\text{rg } A \leq n - 2$, alors toute matrice extraite de A en ôtant une ligne et une colonne est de rang $\leq n - 2$ donc non inversible. Donc $\text{Com}(A) = 0$.
- Si $\text{rg } A = n - 1$, alors il existe une matrice carrée inversible de taille $n - 1$ extraite de A , donc un cofacteur non nul, ainsi $\text{Com}A \neq 0$. D'autre part (*) devient ${}^tA \times \text{Com}(A) = 0$, ce qui entraîne $\text{Im}(\text{Com}(A)) \subset \text{Ker}({}^tA)$, donc $\text{rg}(\text{Com}(A)) \leq \dim(\text{Ker } {}^tA) = 1$ (car tA a même rang que A). Finalement $\text{rg}(\text{Com}(A)) = 1$.

b. Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$, cherchons une matrice de la forme $A = \lambda {}^tM^{-1}$ (avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$ à déterminer) telle que $\text{Com}(A) = M$. On a

$$\text{Com}(A) = \det(A) {}^tA^{-1} = \frac{\lambda^{n-1}}{\det(M)} M,$$

on choisit pour λ une racine $(n - 1)^e$ du nombre complexe $\det M$ et on obtient $M = \text{Com}(A)$. Ainsi $\text{GL}_n(\mathbf{C}) \subset X$.

c. (i) $\text{GL}_n(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ car toute matrice A peut être approchée par des matrices inversibles de la forme $A - \lambda I_n$ avec $\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda \notin \text{Sp}(A)$. A fortiori X est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, i.e. $\bar{X} = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

(ii) Comme $\text{GL}_n(\mathbf{C})$ est un ouvert, on a $\text{GL}_n(\mathbf{C}) \subset \overset{\circ}{X}$. Soit $M \in X$ non inversible, donc de rang 0 ou 1. Comme $n \geq 3$, une matrice de rang 2 ne sera pas une comatrice. Or M est limite d'une suite de matrices de rang 2. En effet si $\text{rg } M = 1$ disons, alors M est équivalente à la matrice diagonale $E_{11} = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$: on a $M = PE_{11}Q$ avec P et Q inversibles ; alors $E_{11} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_{11} + \varepsilon E_{22})$ (où $E_{22} = \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0)$) et $M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon$ avec $M_\varepsilon = P(E_{11} + \varepsilon E_{22})Q$. Les M_ε sont de rang 2 pour tout $\varepsilon \neq 0$, donc n'appartiennent pas à X , ce qui prouve que M n'est pas un point intérieur de X . De même, la matrice nulle est la limite des $\varepsilon(E_{11} + E_{22})$, elle n'appartient pas non plus à $\overset{\circ}{X}$. Finalement, on a $\overset{\circ}{X} = \text{GL}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 5

a. Dérivation sous le signe intégrale, avec domination locale : si $s_0 > 0$, on a, pour tous $s \geq s_0$, $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial s^n} (f(x)e^{-sx}) \right| = |f(x)|x^n e^{-sx} \leq \|f\|_\infty x^n e^{-s_0 x} \quad \text{intégrable par rapport à } x \text{ sur } \mathbf{R}^{+*}.$$

Par conséquent L est C^∞ sur \mathbf{R}^{+*} et pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $s > 0$, $L^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} f(x)(-x)^n e^{-sx} dx$.

b. Preuve par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$ puisque la densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est $\lambda e^{-\lambda t}$. Hérité : les v.a. S_n et X_{n+1} étant indépendantes, la densité de leur somme s'obtient en convolant leurs densités respectives :

$$\forall t > 0, \quad \rho_{n+1}(t) = \int_0^t \rho_n(u)\rho_1(t-u) du = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t u^{n-1} du = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{n!} t^n.$$

On en déduit que la densité de T_n est $\tau_n(t) = n\rho_n(nt) = \frac{(n\lambda)^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-n\lambda t} \mathbf{1}_{t>0}$.

c. Comme f est bornée, $f(T_n)$ admet une espérance :

$$E(f(T_n)) = \int_0^{+\infty} f(t)\tau_n(t) dt = \frac{(n\lambda)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} f(t)t^{n-1} e^{-n\lambda t} dt.$$

L'intégrale à droite est $L^{(n-1)}(n\lambda)$ (au signe près). Si $L = 0$ alors $E(f(T_n)) = 0$ pour tout n .

Par ailleurs d'après la loi forte des grands nombres on a $T_n \rightarrow E(X_1) = 1/\lambda$ presque sûrement. Par convergence dominée, on en déduit que

$$E(f(T_n)) = \int_{\Omega} f(T_n(\omega)) dP(\omega) \rightarrow f(1/\lambda)$$

(vu que $f(T_n(\omega)) \rightarrow f(1/\lambda)$ p.s. et qu'on peut dominer par $\|f\|_{\infty}$).

Finalement, on a montré que si $L = 0$ alors $f(1/\lambda) = 0$. Comme λ est arbitraire dans \mathbf{R}^{+*} , on obtient bien $f = 0$.

Exercice 6

a. (i) Par hypothèse les X_i sont de carré intégrable, donc $Y = v_1X_1 + \dots + v_nX_n$ aussi (car $L^2(\Omega, T, P)$ est un espace vectoriel) et par bilinéarité de la covariance on a

$$V(Y) = \text{Cov}(Y, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \text{Cov}(X_i, X_j) = {}^t v C(X) v.$$

(ii) On peut faire un calcul similaire des coefficients de $C(Z)$ par bilinéarité (avec davantage d'indices à gérer...) Voici une solution plus élégante avec un argument de forme quadratique : pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, on a $\langle v, AX \rangle = \langle {}^t Av, X \rangle$, on prend la variance, ce qui donne ${}^t v C(AX) v = {}^t ({}^t Av) C(X) ({}^t Av) = {}^t v AC(X) {}^t Av$. On en déduit que $C(AX) = AC(X) {}^t A$, en effet la forme quadratique

$$v \mapsto {}^t v (C(AX) - AC(X) {}^t A) v$$

est nulle, ce qui équivaut à la nullité de la matrice symétrique $C(AX) - AC(X) {}^t A$ (par polarisation).

b. La condition est clairement nécessaire car toute matrice de covariance est symétrique positive (la positivité résulte de a.(i)).

Elle est aussi suffisante. En effet, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique positive. Par le théorème spectral, $M = PD {}^t P$ avec D diagonale à valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ et P orthogonale. On introduit n v.a. X_1, \dots, X_n indépendantes, de carré intégrable et telles que $V(X_1) = \lambda_1, \dots, V(X_n) = \lambda_n$ (on peut prendre par exemple des variables gaussiennes indépendantes telles que $X_i \sim \mathcal{N}(0, \lambda_i)$). Alors par indépendance on a $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ si $i \neq j$, donc $C(X) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$, puis on rajoute la matrice de passage à l'aide de a.(ii) : le vecteur aléatoire $Z = PX$ vérifie $C(Z) = PC(X) {}^t P = PD {}^t P = M$.

c. (i) On a $[X \in H] = [\langle X, v \rangle = 0]$. La v.a. $\langle X, v \rangle$ est centrée (car X l'est), d'où : $\langle X, v \rangle = 0$ p.s. si et seulement si $V(\langle X, v \rangle) = E(\langle X, v \rangle^2) = 0$, autrement dit si ${}^t v C(X) v = 0$.

Par ailleurs la matrice $C(X)$ est symétrique positive, donc on a ${}^t v C(X) v = 0$ si et seulement si $v \in \text{Ker } C(X)$ (ce fait bien connu se prouve aisément en décomposant v dans une base orthonormée de vecteurs propres de $C(X)$).

(ii) Soit F un s.e.v. de \mathbf{R}^n tel que $X \in F$ p.s. Pour tout $v \in F^{\perp}$, on a $X \in v^{\perp}$ p.s. (car $F \subset v^{\perp}$) donc $v \in \text{Ker}(C(X))$. Ainsi $F^{\perp} \subset \text{Ker}(C(X))$. On passe à l'orthogonal : $\text{Ker}(C(X))^{\perp} \subset F$.

Prenons $G = \text{Ker}(C(X))^{\perp}$ et montrons que $X \in G$ p.s. Soit (v_1, \dots, v_d) une base de $\text{Ker}(C(X))$. Alors on a $X \in v_1^{\perp}, \dots, X \in v_d^{\perp}$ p.s., or $v_1^{\perp} \cap \dots \cap v_d^{\perp} = \text{Vect}(v_1, \dots, v_d)^{\perp} = \text{Ker}(C(X))^{\perp} = G$, ainsi $X \in G$ p.s.

Conclusion : $G = \text{Ker}(C(X))^{\perp}$ est le plus petit s.e.v. qui contient X presque sûrement.

N.B. Comme $C(X)$ est symétrique, on a en fait $G = \text{Im}(C(X))$ (conséquence du théorème spectral).

Problème d'algèbre et géométrie

I. Groupe dérivé et résolubilité

1. a. La signature d'un commutateur vaut toujours 1 : pour tous $u, v \in \mathfrak{S}_3$, $\varepsilon([u, v]) = \varepsilon(u)\varepsilon(v)\varepsilon(u)^{-1}\varepsilon(v)^{-1} = 1$ (puisque ε est un morphisme de groupes de \mathfrak{S}_3 dans $(\{-1, 1\}, \times)$).

Ainsi \mathfrak{A}_3 est un sous-groupe contenant tous les commutateurs, d'où $D(\mathfrak{S}_3) \subset \mathfrak{A}_3$.

b. On a $\varphi \circ (1\ 3) \circ \varphi^{-1} = (\varphi(1)\ \varphi(3))$ et $[\sigma, \tau] = (\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(3)) \circ (1\ 3) = (2\ 3) \circ (1\ 3) = (1\ 2\ 3)$.

c. $D(\mathfrak{S}_3)$ contient le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$; il contient donc aussi son carré, si bien que $\mathfrak{A}_3 \subset D(\mathfrak{S}_3)$ et finalement $D(\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{A}_3$.

Le groupe \mathfrak{A}_3 est abélien, donc tous ses commutateurs sont égaux à Id, d'où $D(\mathfrak{A}_3) = \{\text{Id}\}$. On en déduit que $D^n(\mathfrak{S}_3) = \{\text{Id}\}$ pour tout $n \geq 2$.

2. a. Le sous-groupe $\langle A \rangle$ est l'ensemble des produits $a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$ avec $n \in \mathbf{N}$, $a_1, \dots, a_n \in A$ et $i_1, \dots, i_n \in \{-1, 1\}$. Son image par le morphisme f est donc l'ensemble des éléments de la forme $f(a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}) = f(a_1)^{i_1} \dots f(a_n)^{i_n}$, ce qui prouve que $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$.

En particulier, on a $f(D(G_1)) = f(\langle \mathcal{C} \rangle) = \langle f(\mathcal{C}) \rangle$.

D'autre part on observe que pour tous $x, y \in G_1$, $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$, si bien que $f(\mathcal{C})$ est l'ensemble des commutateurs de $f(G_1)$. Il vient $\langle f(\mathcal{C}) \rangle = D(f(G_1))$ et finalement $f(D(G_1)) = D(f(G_1))$.

b. Soit $g \in G$ et $f : x \mapsto gxg^{-1}$ un automorphisme intérieur de G . Alors $f(D(G)) = D(f(G)) = D(G)$, ainsi $D(G)$ est stable par les automorphismes intérieurs, i.e. distingué dans G . De même, pour $n \geq 2$, on a $f(D^n(G)) = D^n(f(G))$ (récurrence immédiate), d'où $f(D^n(G)) = D^n(G)$, donc les $D^n(G)$ sont distingués dans G .

3. Premièrement, si $D(G) \subset H$, alors H est distingué dans G , en effet : $\forall h \in H, \forall g \in G, ghg^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h \in H$.

Deuxièmement, soit H est un sous-groupe distingué de G , pour tous $x, y \in G$ notons $\bar{x}, \bar{y} \in G/H$ les classes à gauche modulo H , on a

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x} \iff \bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1} = \bar{e} \iff xyx^{-1}y^{-1} \in H,$$

donc G/H est abélien si et seulement si le sous-groupe H contient tous les commutateurs de G , c'est-à-dire si $D(G) \subset H$.

4. On trouve $[(a\ b\ c), (c\ d\ e)] = (a\ d\ c)$. Le groupe $D(\mathfrak{S}_n)$ contient donc tous les 3-cycles. Ceux-ci engendrent \mathfrak{A}_n , donc $\mathfrak{A}_n \subset D(\mathfrak{S}_n)$. D'autre part $D(\mathfrak{S}_n) \subset \mathfrak{A}_n$ (idem 1.a), donc $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$.

Le même argument prouve que $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$. On a donc $D^k(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour tout $k \geq 1$.

5. Une isométrie f conservant \mathbb{U}_n doit fixer son isobarycentre qui est l'origine, donc f est une rotation de centre 0 ou une réflexion d'axe passant par 0. En examinant les images possibles du point 1, on obtient les $2n$ éléments de D_n : les n rotations de centre 0 et d'angle $2k\pi/n$ ($k \in [0, n-1]$) et les n réflexions s_k d'axe passant par 0 et d'angle polaire $k\pi/n$ ($k \in [0, n-1]$). Si r désigne la rotation d'angle $2\pi/n$, alors $D(D_n) = \langle r \rangle \cup \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$.

Le sous-groupe H engendré par r^2 est distingué dans D_n , en effet si on conjugue un élément r^{2k} de H par une rotation, on obtient r^{2k} , et si on le conjugue par une réflexion (antidéplacement), on obtient la rotation d'angle opposé r^{-2k} qui appartient à H .

Le groupe quotient D_n/H est d'ordre 2 ou 4 (en effet si n est pair, r^2 est d'ordre $n/2$ et si n est impair, r^2 a le même ordre que r , soit n). Dans tous les cas, D_n/H est abélien (tous les groupes d'ordre 2 ou 4 le sont), donc on a $D(D_n) \subset H$ (d'après la question 3).

Par ailleurs r^2 est un commutateur : $r^2 = [s_1, s_0]$ par exemple, d'où $H \subset D(D_n)$. Finalement $D(D_n) = \langle r^2 \rangle$ (sous-groupe d'indice 2 ou 4 dans D_n selon la parité de n).

6. a. L'isométrie r est une rotation vectorielle d'angle θ autour d'un vecteur $u \in \mathbf{R}^3$ et r^{-1} est la rotation de $-\theta$ autour de u , ou mieux : r^{-1} est la rotation de θ autour de $-u$. Soit $g \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$ une rotation vectorielle qui transforme u en $-u$ (i.e. une rotation d'angle π et d'axe orthogonal à u), alors $r^{-1} = grg^{-1}$.

b. Soit $\rho \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$, il existe $r \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$ tel que $\rho = r^2$ (prendre la rotation de même axe que ρ et d'angle moitié). On sait que r et r^{-1} sont conjugués : il existe $f \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$ tel que $r = fr^{-1}f^{-1}$, alors $\rho = rfr^{-1}f^{-1} = [r, f]$. Il en résulte que $D(\text{SO}_3(\mathbf{R})) = \text{SO}_3(\mathbf{R})$.

7. Comme $n \geq 3$, les retournements (symétries orthogonales par rapport à un s.e.v. de dimension $n-2$) engendrent $\text{SO}_n(\mathbf{R})$. Il suffit donc de montrer que les retournements sont contenus dans le groupe dérivé. Soit f un retournement autour d'un s.e.v. F de dimension $n-2$. Dans une base orthonormale \mathcal{B} de \mathbf{R}^n adaptée à $F^\perp \oplus F$, la matrice A de f est diagonale : $A = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$. La matrice extraite $\text{diag}(-1, -1, 1)$ est dans $\text{SO}_3(\mathbf{R})$, donc c'est un commutateur : $\text{diag}(-1, -1, 1) = PQP^{-1}Q^{-1}$ avec $P, Q \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$. On forme les matrices diagonales par blocs $P_1 = \text{diag}(P, I_{n-3})$, $Q_1 = \text{diag}(Q, I_{n-3})$, alors $P_1Q_1P_1^{-1}Q_1^{-1} = A$, donc f est le commutateur des isométries directes représentées par P_1 et Q_1 dans la base \mathcal{B} . Ainsi $f \in D(\text{SO}_n(\mathbf{R}))$, ce qui conclut.

8. Supposons G résoluble : il existe n tel que $D^n(G) = \{e\}$. Alors $D^n(H) \subset D^n(G)$ donc H est résoluble aussi ; soit π le morphisme canonique de G dans G/H , alors $\pi(D^n(G)) = D^n(\pi(G))$ (d'après la question 2.a) i.e. $\{\bar{e}\} = D^n(G/H)$, ainsi G/H est résoluble lui aussi.

Réciproquement, supposons H et G/H résolubles. Il existe p et $q \in \mathbf{N}$ tels que $D^p(H) = \{e\}$ et $D^q(G/H) = \{\bar{e}\}$. Comme précédemment, on a $\pi(D^q(G)) = D^q(G/H) = \{\bar{e}\}$, donc $D^q(G) \subset \text{Ker } \pi = H$, puis $D^{p+q}(G) = D^p(D^q(G)) \subset D^p(H) = \{e\}$, ainsi G est résoluble.

9. Le quotient $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4$ est d'ordre 2, donc abélien, donc résoluble (vu que son groupe dérivé est trivial). D'après la question 8, la résolubilité de \mathfrak{S}_4 équivaut donc à celle de \mathfrak{A}_4 .

Procédons de même dans \mathfrak{A}_4 : le sous-groupe V formé de l'identité et des trois doubles transpositions $(ij)(kl)$ est distingué dans \mathfrak{S}_4 , a fortiori dans \mathfrak{A}_4 et son cardinal est 4. Le quotient \mathfrak{A}_4/V est donc d'ordre 3, donc abélien, donc résoluble. De plus V est lui-même abélien, donc résoluble. On en déduit que \mathfrak{A}_4 est résoluble, et \mathfrak{S}_4 aussi.

10. a. Le cardinal de G est la somme des cardinaux de ses classes de conjugaison. Supposons $\alpha \geq 1$ par exemple, alors p divise la somme des cardinaux des classes. La classe $\{e\}$ est de cardinal 1, premier à p . Il existe donc une autre classe C dont le cardinal n'est pas divisible par p . Or le cardinal de C divise celui de G (en effet si $g \in C$, on a $|C| = |G|/\text{Stab}(g)$), donc $|C| = p^\gamma q^\delta$, et comme p ne divise pas $|C|$, on a $\gamma = 0$, ainsi $|C| = q^\delta$.

b. Les nombres premiers p et q étant fixés, on montre par récurrence forte sur $|G|$ que tout groupe G dont l'ordre est de la forme $p^\alpha q^\beta$ est résoluble. Si $|G| = 1$ il n'y a rien à faire.

Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha q^\beta$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ non tous deux nuls), supposons le résultat vrai pour tout groupe d'ordre $p^\gamma q^\delta < p^\alpha q^\beta$. Si G est abélien, il est clairement résoluble. Supposons G non abélien. D'après le résultat de la question précédente et le théorème admis, G n'est pas simple. Il possède donc un sous-groupe distingué H différent de $\{e\}$ et G . Alors H et G/H ont des ordres de la forme $p^\gamma q^\delta$ et

strictement inférieurs à $|G|$, donc par hypothèse de récurrence, ils sont résolubles. D'après la question 8, G l'est aussi.

II. Étude de quelques groupes de matrices

A. Le groupe $\mathrm{SL}_2(K)$

11. Toute matrice de $\mathrm{SL}_2(K)$ peut être transformée en matrice de \mathcal{T} par des opérations élémentaires sur les lignes (du type transvection afin de conserver le déterminant).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K)$. Si c n'est pas nul, on pose $\lambda = \frac{1-a}{c}$ et on effectue les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - cL_1$, qui transforment successivement A en A' puis A'' :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & d'' \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{SL}_2(K)$ est stable par ces opérations, on a $d'' = \det A'' = 1$, donc $A'' \in \mathcal{T}$.

Si $c = 0$, alors $a \neq 0$, on commence par l'opération $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ et l'on est ramené au cas $c \neq 0$.

Faire une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (avec $i \neq j$) revient à multiplier la matrice à gauche par une matrice de transvection $T = I_2 + \lambda E_{ij} \in \mathcal{T}$. Les manipulations précédentes montrent donc qu'en multipliant A à gauche par deux ou trois matrices de \mathcal{T} , on obtient une matrice $A'' \in \mathcal{T}$; \mathcal{T} étant stable par passage à l'inverse, on conclut que A est produit d'éléments de \mathcal{T} . Ainsi \mathcal{T} engendre $\mathrm{SL}_2(K)$.

12. Soit $a, b \in K$, a non nul. Le commutateur de $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est

$$[M, N] = \begin{pmatrix} 1 & b(a^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le corps K comportant au moins 4 éléments, on choisit $a \in K \setminus \{0, 1, -1\}$, de sorte que $a^2 \neq 1$. Alors pour tout $\lambda \in K$, en prenant $b = \lambda(a^2 - 1)^{-1}$, on a $T = I_2 + \lambda E_{1,2} = [M, N]$ avec $M, N \in \mathrm{SL}_2(K)$. De même, en transposant, $I_2 + \lambda E_{2,1} = {}^t T = [{}^t N^{-1}, {}^t M^{-1}]$. Ainsi $\mathcal{T} \subset \mathrm{D}(\mathrm{SL}_2(K))$, et comme \mathcal{T} engendre $\mathrm{SL}_2(K)$, on conclut que $\mathrm{D}(\mathrm{SL}_2(K)) = \mathrm{SL}_2(K)$.

13. a. Supposons M semblable à $-M$, alors $\mathrm{Tr} M = 0$ et le polynôme caractéristique de M est $X^2 - (\mathrm{Tr} M)X + \det M = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. La matrice M n'ayant pas de valeur propre réelle, si x est un vecteur non nul de \mathbf{R}^2 , alors (x, Mx) est une base de \mathbf{R}^2 . Dans cette base la matrice M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. La conservation de la trace et du déterminant impose $b = 0$ et $a = -1$, ainsi M est semblable à R dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

b. Soit $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, supposons par l'absurde que $QR = -RQ$, ce qui donne en explicitant ces deux produits : $a = -d$ et $b = c$. Or $\det Q = 1$, d'où $-a^2 - b^2 = 1$, impossible dans \mathbf{R} .

Supposons ensuite par l'absurde que $-I_2$ soit un commutateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$: $-I_2 = ABA^{-1}B^{-1}$ avec $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, alors $ABA^{-1} = -B$, donc d'après la question 13.a, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $R = PBP^{-1}$. Soit $Q = PAP^{-1}$, on a $Q \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ et $QRQ^{-1}R^{-1} = P(ABA^{-1}B^{-1})P^{-1} = -I_2$, c'est-à-dire $QR = -RQ$, ce qui est impossible.

14. On montre que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est connexe par arcs. D'abord, pour tout $T = I_2 + \lambda E_{ij} \in \mathcal{T}$ ($i \neq j$), il existe un chemin continu de I_2 à T , donné par $t \mapsto M(t) = I_2 + t\lambda E_{ij}$, $t \in [0, 1]$ (on a bien $M(t) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ pour tout t).

Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. On décompose A en produit d'éléments de \mathcal{T} : $A = T_1 \dots T_n$; il existe des chemins continus de I_2 à chaque T_k , notés $t \mapsto M_k(t)$ ($t \in [0, 1]$). Alors $t \mapsto M_1(t) \dots M_n(t)$ est un chemin continu de I_2 à A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Ceci prouve la connexité par arcs de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

B. Le groupe de LORENTZ

Dans tout ce qui suit, les éléments de \mathbf{R}^4 sont identifiés à des matrices colonnes.

15. La forme polaire de Q est $b(X, X') = tt' - xx' - yy' - zz'$; la résolution de l'équation $b(X, e_1) = 0$ fournit immédiatement $e_1^\perp = \{(0, x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$.

16. A est un automorphisme de \mathbf{R}^4 qui conserve Q , donc on a immédiatement $Q(X) = 1 \iff Q(AX) = 1$ pour tout $X \in \mathbf{R}^4$ et $A(S) = S$.

L'ensemble S^+ est connexe, en effet pour tout $X = (t, x, y, z) \in S^+$, on a $t = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, si bien que S^+ est l'image du connexe \mathbf{R}^3 par la bijection continue

$$(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto (\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}, x, y, z) \in S^+.$$

De même S^- est connexe, mais $S^+ \cup S^-$ ne l'est pas, puisque $S^+ \cup S^-$ est une partition de S en deux ouverts relatifs non vides. Les ensembles S^+ et S^- sont donc les composantes connexes de S .

Enfin A induit un homéomorphisme de S sur S , donc il conserve la partition de S en ses composantes connexes, ce qui peut se faire de deux façons : les cas (a) et (b) de l'énoncé.

17. Comme $e_1 \in S^+$, on a $Ae_1 \in S = S^+ \cup S^-$, donc la coordonnée t de Ae_1 n'est pas nulle ; cette coordonnée est $a_{1,1}$. Le nombre $\frac{a_{1,1}}{|a_{1,1}|}$ est un signe qui indique si A transforme S^+ en S^+ ou en S^- . En effet, vu le résultat de la question précédente, cela revient à savoir si Ae_1 appartient à S^+ ou à S^- , i.e. cela dépend du signe de $a_{1,1}$.

On en déduit que l'application $f_1 : A \in O_{1,3}(\mathbf{R}) \mapsto \frac{a_{1,1}}{|a_{1,1}|} \in \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes. En effet, d'après la question précédente, $O_{1,3}(\mathbf{R})$ agit sur l'ensemble à deux éléments $\{S^+, S^-\}$, ce qui se traduit par un morphisme de groupes de $O_{1,3}(\mathbf{R})$ dans le groupe des permutations de $\{S^+, S^-\}$; ce groupe de permutations possède deux éléments et s'identifie au groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$, et l'on obtient exactement le morphisme f_1 .

Il est clair par ailleurs que le déterminant induit un morphisme de groupes de $O_{1,3}(\mathbf{R})$ dans \mathbf{R}^* , en fait à valeurs dans $\{-1, 1\}$, en effet pour tout $A \in O_{1,3}(\mathbf{R})$, on a ${}^tAJA = J$, d'où $(\det A)^2 \det J = \det J$, ce qui donne $(\det A)^2 = 1$. Ces arguments prouvent que la fonction f de l'énoncé est bien définie et qu'elle est un morphisme de groupes de $O_{1,3}(\mathbf{R})$ dans $\{-1, 1\}^2$. Ce morphisme est surjectif : on peut le voir avec les images des quatres matrices diagonales $\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon', 1, 1) \in O_{1,3}(\mathbf{R})$, où $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$.

18. Soit $X = (t, x, y, z) \in S^+$ et $H = \Phi(X)$: H est une matrice hermitienne telle que $\det H = Q(X) = 1$ et $\mathrm{Tr} H = 2t > 0$. Elle possède donc deux valeurs propres réelles strictement positives. En diagonalisant H grâce au théorème spectral, on peut construire une racine carrée Q hermitienne positive de H : on a alors $H = Q^2 = QQ^*$. Il reste à examiner le déterminant : $\det Q = 1$ (car Q est positive). Finalement on a $PHP^* = I_2$ avec $P = Q^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

19. a. Soit $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, l'application $\Theta(P) = \Phi^{-1} \circ T(P) \circ \Phi$ est une permutation de \mathbf{R}^4 et elle est aussi linéaire, d'où $\Theta(P) \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$. On en déduit aisément que Θ est un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$.

Déterminons $\mathrm{Ker} \Theta = \mathrm{Ker} T = \{P \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \mid \forall H \in \mathcal{H}_2, PHP^* = H\}$. Si P est dans ce noyau, prenons d'abord $H = I_2$, on obtient $PP^* = I_2$, i.e. P est unitaire. On a donc $PH = HP$ pour toute matrice

hermitienne H . En prenant $H = \text{diag}(1, 2)$ par exemple, on en déduit que P est diagonale, puis avec $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on montre que les coefficients diagonaux de P sont égaux. Ainsi $P = \lambda I_2$ avec $\lambda = \pm 1$ (car $\det P = \lambda^2 = 1$).

Réciproquement on a bien $\Theta(\pm I_2) = \text{Id}_{\mathbf{R}^4}$, donc $\text{Ker } \Theta = \{I_2, -I_2\}$.

b. Soit $P \in \text{SL}_2(\mathbf{C})$ et $A = \Theta(P) \in \text{GL}_4(\mathbf{R})$. Pour tout $X \in \mathbf{R}^4$, on calcule :

$$AX = [\Phi^{-1} \circ T(P) \circ \Phi](X) = \Phi^{-1}(P\Phi(X)P^*),$$

puis

$$Q(AX) = \det(\Phi(AX)) = \det(P\Phi(X)P^*) = \det(\Phi(X))$$

(vu que $\det P = 1$), donc $Q(AX) = Q(X)$. Ainsi A conserve la forme quadratique de Lorentz, i.e. $A \in O_{1,3}(\mathbf{R})$. On a donc prouvé que $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C})) \subset O_{1,3}(\mathbf{R})$.

On considère ensuite $\det \circ \Theta : \text{SL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \{-1, 1\}$. L'application Θ est continue de $\text{SL}_2(\mathbf{C})$ dans $\text{GL}_4(\mathbf{R})$ (si l'on écrit les 16 coefficients de la matrice $A = \Theta(P)$ en fonction des coefficients p_{ij} de P , on obtient des expressions polynomiales de degré 2 en les p_{ij} et leurs conjugués, d'où la continuité). La composée $\det \circ \Theta$ est continue elle aussi, et à valeurs dans l'ensemble discret $\{-1, 1\}$. Comme $\text{SL}_2(\mathbf{C})$ est connexe, on en déduit que $\det \circ \Theta$ est constante. On a donc $\det(\Theta(P)) = 1$ pour tout $P \in \text{SL}_2(\mathbf{C})$, et on conclut que $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C})) \subset \text{SO}_{1,3}(\mathbf{R})$.

20. On note $P = i\Phi(X)$ pour abrégier ; on constate que l'on a bien $P \in \text{SL}_2(\mathbf{C})$. On calcule $\Theta(P)e_1 = \Phi^{-1}(P\Phi(e_1)P^*) = \Phi^{-1}(PP^*)$ vu que $\Phi(e_1) = I_2$. Or par calcul direct avec les coefficients, on a sans peine $P^* = -P$ et $PP^* = -P^2 = I_2$, donc $\Theta(P)e_1 = e_1$. Comme $\Theta(P)$ est élément du groupe orthogonal de Q , on en déduit que $\Theta(P)$ laisse stable le sous-espace $e_1^\perp = W$.

La matrice $\Theta(P)$ est donc diagonale par blocs, de la forme $\text{diag}(1, U)$, avec $U \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. L'appartenance de $\Theta(P)$ à $\text{SO}_{1,3}(\mathbf{R})$ se traduit par : $UU = I_3$ et $\det U = 1$, ainsi $U \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$, ce qui signifie que $\Theta(P)$ induit sur W une rotation vectorielle u .

Cherchons l'image de X : $\Theta(P)X = \Phi^{-1}(P\Phi(X)P^*)$, or $P\Phi(X)P^* = \Phi(X)PP^* = \Phi(X)$, donc $u(X) = \Theta(P)X = X$.

On calcule enfin u^2 : on a $\Theta(P)^2 = \Theta(P^2) = I_4$, (car $P^2 = -I_2 \in \text{Ker } \Theta$). Ainsi $u^2 = \text{Id}_W$; or $u \neq \text{Id}_W$ (sinon $\Theta(P) = I_4$, or $P \notin \text{Ker } \Theta = \{\pm I_2\}$). Nécessairement u est une rotation d'angle π , et son axe est $\mathbf{R}X$ (puisqu'elle fixe X).

On sait que les retournements (rotations de π ici) engendrent le groupe $\text{SO}_3(\mathbf{R})$. Soit R une matrice quelconque de $\text{SO}_3(\mathbf{R})$, il existe des retournements U_1, \dots, U_k tels que $R = U_1 \dots U_k$. D'après ce que l'on vient de voir, $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C}))$ contient les matrices diagonales par blocs $\text{diag}(1, U_i)$, il contient donc leur produit $\text{diag}(1, R)$.

21. Lemme. Pour tout $X \in S^+$, il existe $P \in \text{SL}_2(\mathbf{C})$ telle que $\Theta(P)X = e_1$ (ce qui revient à dire que $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C}))$ agit transitivement sur S^+).

Preuve du lemme : il s'agit simplement d'appliquer le résultat de la question 18 à $H = \Phi(X)$: il existe $P \in \text{SL}_2(\mathbf{C})$ telle que $PHP^* = I_2$, c'est-à-dire $[T(P) \circ \Phi](X) = I_2$, ou encore $\Theta(P)X = [\Phi^{-1} \circ T(P) \circ \Phi](X) = \Phi^{-1}(I_2) = e_1$.

Soit $A \in \text{Ker } f$, i.e. $A \in \text{SO}_{1,3}(\mathbf{R})$ et préservant le sens du temps ($A(S^+) = S^+$). Soit $X = Ae_1 \in S^+$ et $P \in \text{SL}_2(\mathbf{C})$ telle que $\Theta(P)X = e_1$ (lemme), ce qui donne $\Theta(P)Ae_1 = e_1$. Notons $B = \Theta(P)A \in \text{SO}_{1,3}(\mathbf{R})$, cette matrice laisse stable $W = e_1^\perp$, elle est diagonale par blocs de la forme $\text{diag}(1, R)$ et $R \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$. Donc B appartient à $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C}))$ (d'après la question 20) et $A = \Theta(P)^{-1}B$ aussi.

22. Soit C la composante connexe de l'élément neutre I_4 dans $O_{1,3}(\mathbf{R})$. Comme $\text{SL}_2(\mathbf{C})$ est connexe et que Θ est continu, on a l'inclusion $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C})) \subset C$. Par ailleurs, le morphisme f de la question 17 est

continu et à valeurs dans un ensemble fini, donc il est constant sur C , d'où $C \subset \text{Ker } f$. Enfin on a vu que $\text{Ker } f \subset \Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C}))$ (question 21). Ces inclusions sont donc des égalités : $C = \text{Ker } f = \Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C}))$. De plus, $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C})) = \text{Im } \Theta \simeq \text{SL}_2(\mathbf{C})/\text{Ker } \Theta = \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ (isomorphisme de groupes).

Enfin, on obtient facilement les autres composantes connexes de $O_{1,3}(\mathbf{R})$: ce sont les classes à gauche modulo $\text{Ker } f$ dans $O_{1,3}(\mathbf{R})$, en effet pour tout $A \in O_{1,3}(\mathbf{R})$, la classe $A \cdot \text{Ker } f$ est l'image de $\text{Ker } f = C$ par l'homéomorphisme $M \mapsto AM$ de $O_{1,3}(\mathbf{R})$, donc c'est une composante connexe de $O_{1,3}(\mathbf{R})$. L'ensemble quotient $O_{1,3}(\mathbf{R})/\text{Ker } f$ est en bijection avec $\text{Im } f = \{-1, 1\}^2$, donc il y a bien quatre composantes connexes (qui sont aussi les images réciproques des quatre éléments de $\{-1, 1\}^2$ par f).

23. Il est évident que $O_{1,3}(\mathbf{R})$ n'est pas résoluble car il contient un sous-groupe isomorphe à $\text{SO}_3(\mathbf{R})$ (formé des matrices $\text{diag}(1, R)$ rencontrées à la question 20), or $\text{SO}_3(\mathbf{R})$ n'est pas résoluble (vu le résultat de la question 6), donc $O_{1,3}(\mathbf{R})$ non plus.

Plus précisément, montrons que $\text{D}(O_{1,3}(\mathbf{R})) = \text{Ker } f$. On a $O_{1,3}(\mathbf{R})/\text{Ker } f \simeq \{-1, 1\}^2$ abélien, donc d'après la question 3, $\text{D}(O_{1,3}(\mathbf{R})) \subset \text{Ker } f$.

D'autre part on sait que $\text{D}(\text{SL}_2(\mathbf{C})) = \text{SL}_2(\mathbf{C})$ (question 12), donc $\text{D}(\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C}))) = \Theta(\text{D}(\text{SL}_2(\mathbf{C}))) = \Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C})) = \text{Ker } f$. Comme il est évident que $\text{D}(\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C}))) \subset \text{D}(O_{1,3}(\mathbf{R}))$, on conclut que $\text{D}(O_{1,3}(\mathbf{R})) = \text{Ker } f$ (sous-groupe des éléments de $O_{1,3}(\mathbf{R})$ de déterminant 1 et qui préservent le sens du temps).

Au passage, on a aussi montré que $\Theta(\text{SL}_2(\mathbf{C})) = \text{Ker } f$ est son propre groupe dérivé, donc $\text{D}^n(O_{1,3}(\mathbf{R})) = \text{Ker } f$ pour tout $n \geq 1$.

C. Un groupe orthogonal en dimension 2 sur un corps fini

24. Le corps $L = \mathbb{F}_q[\sqrt{\alpha}] \simeq \mathbb{F}_q[X]/(X^2 - \alpha)$ (isomorphisme de \mathbb{F}_q -algèbres) est une extension de degré 2 de \mathbb{F}_q , admettant pour base $(1, \sqrt{\alpha})$.

Soit f un automorphisme de \mathbb{F}_q -algèbre de L . Alors $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{\alpha})^2 = f(\alpha) = \alpha$ (puisque $\alpha \in \mathbb{F}_q$), donc $f(\sqrt{\alpha}) = \pm\sqrt{\alpha}$, ce qui laisse deux possibilités pour f : l'identité et σ . On peut vérifier directement de σ est bien un \mathbb{F}_q -automorphisme de L (ou composer les isomorphismes canoniques $\mathbb{F}_q[\sqrt{\alpha}] \simeq \mathbb{F}_q[X]/(X^2 - \alpha)$ et $\mathbb{F}_q[-\sqrt{\alpha}] \simeq \mathbb{F}_q[X]/(X^2 - \alpha)$).

25. a. On remarque que pour tout $z = x + y\sqrt{\alpha} \in L$ (avec $x, y \in \mathbb{F}_q$), on a $Q(z) = z\sigma(z)$. Comme L est un corps et σ un isomorphisme, on a $Q(z) = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Soit $u \in \text{SO}(Q)$ une isométrie positive de Q admettant un point fixe z non nul. La forme quadratique Q est non dégénérée sur le \mathbb{F}_q -plan vectoriel L , donc z^\perp est une droite vectorielle $\text{Vect}(z')$ (il s'agit de l'orthogonal au sens de Q), et cette droite est différente de $\text{Vect}(z)$ (car z n'est pas isotrope). L'isométrie u conserve l'orthogonalité, donc $u(z^\perp) = u(z)^\perp = z^\perp$. Ainsi (z, z') est une base de vecteurs propres de u . La valeur propre associée à z est 1 ; comme $\det u = 1$, l'autre valeur propre est 1 aussi, si bien que $u = \text{Id}_L$.

b. Il est immédiat que $u_g \in O(Q)$ pour tout $g \in G$ (vu que $Q(gz) = gz\sigma(gz) = g\sigma(g)z\sigma(z) = Q(z)$ pour tout $z \in L$), et que $U : g \mapsto u_g$ est un morphisme de groupes injectif de G dans $O(Q)$.

On vérifie de plus que $\det u_g = 1$: si $g = a + b\sqrt{\alpha}$ alors la matrice de u_g dans la base $(1, \sqrt{\alpha})$ de L est $\begin{pmatrix} a & b\alpha \\ b & a \end{pmatrix}$, son déterminant est égal à $a^2 - b^2\alpha = g\sigma(g) = 1$.

On prouve enfin la surjectivité de U sur $\text{SO}(Q)$. Soit $v \in \text{SO}(Q)$, posons $g = v(1)$, alors $Q(g) = Q(1) = 1$ donc $g \in G$, et $u_{g^{-1}} \circ v$ est un élément de $\text{SO}(Q)$ admettant 1 pour point fixe, d'où $u_{g^{-1}} \circ v = \text{Id}_L$ (d'après la question 25.a), i.e. $v = u_g$. Ainsi $U : g \mapsto u_g$ est bien un isomorphisme de groupes de G sur $\text{SO}(Q)$.

Le groupe $G \subset L^*$ est abélien, donc $\text{SO}(Q)$ aussi. On en déduit que $\text{D}(\text{SO}(Q)) = \{\text{Id}_L\}$; par ailleurs $\text{D}(O(Q)) \subset \text{SO}(Q)$, donc $\text{D}^2(O(Q)) = \{\text{Id}_L\}$, ce qui prouve que $O(Q)$ est résoluble.

26. a. On montre classiquement que l'ensemble des carrés non nuls de \mathbb{F}_q est un sous-groupe d'indice 2 de \mathbb{F}_q^* ; on en déduit que le nombre de carrés dans \mathbb{F}_q (y compris 0) est $(q+1)/2$. Soit $(a, b) \in (\mathbb{F}_q^*)^2$ et $c \in \mathbb{F}_q$, le cardinal de l'ensemble $E = \{ax^2 \mid x \in \mathbb{F}_q\}$ est $(q+1)/2$, le cardinal de $E' = \{c - by^2 \mid y \in \mathbb{F}_q\}$ est aussi $(q+1)/2$ (ce sont les images de l'ensemble des carrés par des bijections affines de \mathbb{F}_q). Ainsi $|E| + |E'| > q$ donc E et E' ne sont pas disjoints, d'où l'existence de $x, y \in \mathbb{F}_q$ tels que $ax^2 = c - by^2$.

b. On remarque que la conjugaison σ (définie à la question 24) est dans $O(Q) \setminus \text{SO}(Q)$ (puisque $\det \sigma = -1$). Les éléments de $O(Q)$ ayant pour déterminant 1 ou -1 , on voit que $|\text{SO}(Q)| = |O(Q) \setminus \text{SO}(Q)|$ (grâce à la bijection $u \mapsto \sigma \circ u$ entre $\text{SO}(Q)$ et son complémentaire), d'où $|O(Q)| = 2|\text{SO}(Q)|$.

On est ramené à déterminer $|G|$ (cardinal du groupe de la question 25.b isomorphe à $\text{SO}(q)$). Considérons la restriction de Q à $L^* : z = x + y\sqrt{\alpha} \mapsto z\sigma(z) = x^2 - \alpha y^2$. C'est un morphisme de groupes de L^* dans \mathbb{F}_q^* , de noyau G ; il résulte de la question 26.a que ce morphisme est surjectif (soit $c \in \mathbb{F}_q^*$, $(a, b) = (1, -\alpha)$, il existe (x, y) tel que $c = x^2 - \alpha y^2 = (x + \alpha y)(x - \alpha y)$). On a donc $|L^*| = |G| \times |\mathbb{F}_q^*|$, d'où $|G| = \frac{q^2-1}{q-1} = q+1$. Finalement $|O(Q)| = 2(q+1)$.

27. Le groupe L^* est cyclique (car L est un corps fini); son sous-groupe $G \simeq \text{SO}(Q)$ l'est aussi, d'ordre $q+1$. Montrons alors que $O(Q) \simeq D_{q+1}$ (groupe diédral à $2(q+1)$ éléments). Ce groupe diédral est engendré par la rotation r d'angle $2\pi/(q+1)$ et par la réflexion s par rapport à l'axe réel (dans \mathbf{C}); $D_{q+1} = \{r^k, r^k s \mid 0 \leq k \leq q\}$, et les produits dans D_{q+1} se calculent grâce aux relations $r^{q+1} = \text{Id}$ et $sr = r^q s$ (en effet srs^{-1} est la rotation d'angle $-2\pi/(q+1)$, c'est $r^{-1} = r^q$).

Soit u un générateur du groupe cyclique $\text{SO}(Q)$. Alors u et la conjugaison σ vérifient dans $O(Q)$ les mêmes relations que r et s dans D_{q+1} , à savoir $u^{q+1} = \text{Id}_L$ et $\sigma \circ u \circ \sigma^{-1} = u^{-1}$ (en effet il existe $g \in G$ tel que $u = u_g$, d'où, pour tout $x \in L$, $\sigma \circ u_g \circ \sigma(x) = \sigma(g\sigma(x)) = \sigma(g)x$ et $\sigma(g) = g^{-1}$ puisque $g \in G$).

Maintenant, la fonction $D_{q+1} \rightarrow O(Q)$ définie par $r^k \mapsto u^k, r^k s \mapsto u^k \sigma$, est un morphisme de groupes : on peut le vérifier aisément en testant tous les cas (cela fonctionne puisqu'on a les mêmes relations dans les deux groupes). Son noyau est clairement trivial; vu l'égalité des cardinaux, on a un isomorphisme de groupes.

III. Entiers algébriques et caractères irréductibles

A. Entiers algébriques

28. Soit $x \in \mathcal{A} \cap \mathbf{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ (fraction irréductible). Soit $P = a_0 + \dots + X^n$ un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ annihilant x , alors on a $q^n P(x) = a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \dots + a_{n-1} p^{n-1} q + p^n = 0$, donc q divise $p^n = q(-a_0 q^{n-1} - \dots - a_{n-1} p^{n-1})$. Comme q est premier à p , il vient $q = \pm 1$ et $x \in \mathbf{Z}$. Réciproquement les entiers relatifs sont évidemment des entiers algébriques, donc $\mathcal{A} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$.

29. a. Notons d'abord que $\mathbf{Z}[a] = \{P(a) \mid P \in \mathbf{Z}[X]\}$, c'est le groupe abélien engendré par la famille $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$.

On a aisément $(i) \Rightarrow (ii)$ en effet si a est un entier algébrique, racine d'un polynôme unitaire $P = b_0 + \dots + b_{d-1} X^{d-1} + X^d \in \mathbf{Z}[X]$, alors $a^d = -b_0 - \dots - b_{d-1} a^{d-1}$; par récurrence (ou via la division euclidienne de X^n par P), on en déduit que pour tout $n \geq d$, a^n est combinaison linéaire, à coefficients entiers, de $1, a, \dots, a^{d-1}$. Ainsi $\mathbf{Z}[a]$ est engendré en tant que groupe abélien par la famille finie $(1, a, \dots, a^{d-1})$.

L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est évidente bien entendu.

Ensuite, on peut invoquer le fait que tout sous-groupe d'un groupe abélien de type fini est de type fini, ce qui permet de prouver $(iii) \Rightarrow (ii)$ (si a est contenu dans un sous-anneau A de \mathbf{C} de type fini en tant que groupe abélien, alors $\mathbf{Z}[a] \subset A$ donc $\mathbf{Z}[a]$ est aussi de type fini en tant que groupe abélien).

Enfin on montre que $(ii) \Rightarrow (i)$. Si $\mathbf{Z}[a]$ est de type fini en tant que groupe, soit (x_1, \dots, x_n) une famille génératrice de $\mathbf{Z}[a]$: $\mathbf{Z}[a] = \mathbf{Z}x_1 + \dots + \mathbf{Z}x_n$. Il existe $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{Z}[X]$ tels que $x_i = P_i(a)$ pour tout

$i \leq n$. Soit $d > \max(\deg P_1, \dots, \deg P_n)$, alors $a^d \in \mathbf{Z}[a]$ peut s'écrire $a^d = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ (avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}$), ce qui donne une égalité de la forme $a^d = Q(a)$ où $Q = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \in \mathbf{Z}[X]$, $\deg Q < d$. Alors le polynôme unitaire $X^d - Q \in \mathbf{Z}[X]$ annule a , donc a est un entier algébrique.

Autre solution : faire (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) comme ci-dessus puis (iii) \Rightarrow (i) par un argument classique de polynôme caractéristique (cf. corrigé du sujet de Mathématiques Générales 2019).

b. Soit $a, b \in \mathcal{A}$, on considère deux polynômes unitaires de $\mathbf{Z}[X]$, $P = \lambda_0 + \dots + X^p$ et $Q = \mu_0 + \dots + X^q$ annihilant a et b respectivement. Alors le sous-anneau $\mathbf{Z}[a, b]$, engendré (en tant que groupe abélien) par les $a^i b^j$ pour $(i, j) \in \mathbf{N}^2$, est en fait engendré par les $a^i b^j$ tels que $i < p$ et $j < q$ (en effet, comme précédemment, tous les a^i sont des combinaisons à coefficients entiers de $1, a, \dots, a^{p-1}$ et les b^j sont des combinaisons de $1, b, \dots, b^{q-1}$; on fait le produit). Ainsi $\mathbf{Z}[a, b]$ est un sous-anneau de \mathbf{C} de type fini en tant que groupe abélien. Par conséquent, d'après (iii) ci-dessus, ses éléments sont des entiers algébriques. En particulier $a + b$, ab et $-a$ sont des entiers algébriques. Ce qui prouve que \mathcal{A} est un sous-anneau de \mathbf{C} .

30. Plusieurs approches sont possibles pour résoudre cette question, à l'aide de la factorialité de $\mathbf{Z}[X]$ ou du lemme de Gauss sur les polynômes primitifs. Voici une solution assez élémentaire.

Soit $a \in \mathcal{A}$ et P un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ qui annule a . Dans $\mathbf{Q}[X]$, le polynôme minimal π_a de a divise P . Les racines complexes de π_a sont donc aussi des racines de P , par conséquent elles sont des entiers algébriques. Sachant que π_a est unitaire et que \mathcal{A} est un anneau, les relations entre coefficients et racines montrent que les coefficients de π_a sont des entiers algébriques. Ainsi π_a est à coefficients dans $\mathcal{A} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$.

31. Soit $g \in G$ et d l'ordre de g , alors $g^d = e$, donc $\rho(g)^d = \text{Id}_V$. Le polynôme $X^d - 1$ annule l'endomorphisme $\rho(g) \in (V)$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont des racines d^e de l'unité, en particulier ce sont des entiers algébriques (puisqu'elles sont annihilées par $X^d - 1$ justement). La trace de $\rho(g)$ est la somme de ses valeurs propres (avec multiplicités). Comme \mathcal{A} est stable par somme, on conclut que $\chi(g) \in \mathcal{A}$.

32. a. Le corps $K = \mathbf{Q}[e^{2i\pi/d}]$ contient toutes les racines d^e de l'unité de \mathbf{C} , il contient donc les z_k et a .

Les nombres a et b sont des racines de P qui est donc leur polynôme minimal commun. On dispose donc des isomorphismes de corps $\phi : \mathbf{Q}[X]/(P) \rightarrow \mathbf{Q}[a]$ et $\psi : \mathbf{Q}[X]/(P) \rightarrow \mathbf{Q}[b]$, tels que $\phi(X \bmod P) = a$ et $\psi(X \bmod P) = b$ (obtenus en factorisant les morphismes de \mathbf{Q} -algèbres $Q \in \mathbf{Q}[X] \mapsto Q(a) \in \mathbf{Q}[a]$ et $Q \mapsto Q(b)$). La composée $f = \psi \circ \phi^{-1}$ est un isomorphisme de corps de $\mathbf{Q}[a]$ sur $\mathbf{Q}[b]$ envoyant a sur b . On va ensuite montrer qu'on peut prolonger f à K .

Lemme. Si k est un sous-corps de \mathbf{C} , f un morphisme de corps de k dans \mathbf{C} et $z \in \mathbf{C} \setminus k$ un élément algébrique sur k , alors f peut être prolongé en un morphisme de corps de $k[z]$ dans \mathbf{C} .

En effet, tout d'abord on peut étendre f en un morphisme d'anneaux F de $k[X]$ dans $\mathbf{C}[X]$ en posant : $F(\alpha_0 + \dots + \alpha_d X^d) = f(\alpha_0) + \dots + f(\alpha_d) X^d$. On obtient en fait un isomorphisme d'anneaux de $k[X]$ sur $\tilde{k}[X]$, où $\tilde{k} = f(k)$ (sous-corps de \mathbf{C} isomorphe à k). Soit Π le polynôme minimal de z sur k , $\tilde{\Pi} = F(\Pi)$ et \tilde{z} une racine complexe de $\tilde{\Pi}$. Le polynôme Π est irréductible dans $k[X]$; grâce à l'isomorphisme F , on en déduit que $\tilde{\Pi}$ est irréductible dans $\tilde{k}[X]$. On dispose alors des isomorphismes d'anneaux : $k[z] \simeq k[X]/(\Pi)$ et $\tilde{k}[\tilde{z}] \simeq \tilde{k}[X]/(\tilde{\Pi})$ (en effet $\tilde{\Pi}$ est le polynôme minimal de \tilde{z} sur \tilde{k}). De plus F induit un isomorphisme d'anneaux de $k[X]/(\Pi)$ sur $\tilde{k}[X]/(\tilde{\Pi})$. En composant, on obtient un isomorphisme d'anneaux de $k[z]$ sur $\tilde{k}[\tilde{z}]$. C'est en fait un morphisme de corps (vu qu'il va d'un corps dans un corps). De plus il prolonge f (si $x \in k$, x est envoyé successivement sur $x \bmod \Pi$ dans $k[X]/(\Pi)$, puis sur $f(x) \bmod \tilde{\Pi}$ dans $\tilde{k}[X]/(\tilde{\Pi})$ et enfin sur $f(x)$ dans $\tilde{k}[\tilde{z}]$ par définition des isomorphismes utilisés dans la composition).

On applique le lemme répétitivement à partir de $k_0 = \mathbf{Q}[a]$ et du morphisme de corps $f : \mathbf{Q}[a] \rightarrow \mathbf{C}$ défini juste au-dessus du lemme. Si $k_0 \neq K$, on prend un élément $z_1 \in K \setminus k_0$, il est algébrique sur \mathbf{Q} (car K est une extension algébrique de \mathbf{Q}), donc sur k_0 et le lemme fournit un prolongement de $f : k_1 \rightarrow \mathbf{C}$ où $k_1 = k_0[z_1]$. Si $k_1 \neq K$, on recommence en prenant $z_2 \in K \setminus k_1$ et en prolongeant $f : k_2 = k_1[z_2] \rightarrow \mathbf{C}$. Après un nombre fini d'itérations, on aboutit à un $k_m = K$, en effet la suite des degrés des k_j sur \mathbf{Q} est strictement croissante : $[k_0 : \mathbf{Q}] < [k_1 : \mathbf{Q}] < \dots$ si bien que le processus ne peut se poursuivre indéfiniment sans dépasser le degré $[K : \mathbf{Q}]$ (qui est fini).

b. Le morphisme de corps $f : K \rightarrow \mathbf{C}$ construit ci-dessus envoie $a = \frac{1}{n}(z_1 + \dots + z_n)$ sur b , d'où $b = \frac{1}{n}(f(z_1) + \dots + f(z_n))$. Or les $f(z_k)$ sont des racines d^e de l'unité car $f(z_k)^d = f(z_k^d) = f(1) = 1$. On a donc $|f(z_k)| = 1$, d'où $|b| \leq 1$.

À ce stade, on a prouvé que toute racine de P (le polynôme minimal de a sur \mathbf{Q}) est de module ≤ 1 . Notons b_1, \dots, b_k les racines complexes de P (où $k = \deg P$). On a $P(0) = (-1)^k b_1 \dots b_k$, d'où $|P(0)| \leq 1$. Or $P(0) \in \mathbf{Z}$ (terme constant de P), et de plus $P(0) \neq 0$ (sinon P n'est pas irréductible; on rappelle que a est supposé non nul, donc $P \neq X$). Il vient donc $P(0) = \pm 1$. On en déduit que toutes les racines de P sont de module 1 (sans quoi leur produit est de module < 1), en particulier $|a| = 1$. On aboutit ainsi à $|z_1 + \dots + z_n| = n = |z_1| + \dots + |z_n|$. Il en résulte que les z_k ont tous le même argument (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire dans \mathbf{C}), d'où $z_1 = \dots = z_n$ (vu qu'ils sont tous de module 1).

B. Caractères irréductibles

33. Un élément f de \mathbf{Z}^G est dans le centre de \mathbf{Z}^G si et seulement s'il commute avec tous les δ_g ($g \in G$). Or $f = \sum_{h \in G} f(h)\delta_h$ et $f * \delta_g = \sum_h f(h)\delta_{gh} = \sum_{h' \in G} f(g^{-1}h')\delta_{h'}$ (changement d'indice $h' = gh$). De même, $\delta_g * f = \sum_{h' \in G} f(h'g^{-1})\delta_{h'}$, donc on a : $f \in B \iff \forall g, h' \in G, f(g^{-1}h') = f(h'g^{-1})$. Cette condition revient à dire : $\forall g, h \in G, f(g^{-1}hg) = f(h)$, autrement dit que f est constante sur les classes de conjugaison de G (fonction centrale).

34. a. La fonction $\xi : \mathbf{Z}^G \rightarrow (V)$ est un morphisme d'anneaux (la multiplicativité découle du fait que $\xi(\delta_g * \delta_h) = \xi(\delta_{gh}) = \rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h) = \xi(\delta_g) \circ \xi(\delta_h)$ puis par bilinéarité de la multiplication dans les deux anneaux et linéarité de ξ , il vient $\xi(f * f') = \xi(f) \circ \xi(f')$ pour tous $f, f' \in \mathbf{Z}^G$).

Si $f \in B$, alors f commute avec tous les δ_g , donc $\xi(f)$ commute avec tous les $\xi(\delta_g) = \rho(g)$. La représentation ρ étant irréductible, on en déduit que $\xi(f)$ est une homothétie (lemme de Schur).

Enfin la restriction $\xi|_B : B \rightarrow \mathbf{C} \text{Id}_V$ est un morphisme d'anneaux (à valeurs dans le sous-anneau des homothéties de V) et $\alpha : \mathbf{C} \text{Id}_V \rightarrow \mathbf{C}$ aussi, donc la composée $\alpha \circ \xi|_B$ aussi, si bien que $\alpha(\xi(B))$ est un sous-anneau de \mathbf{C} .

b. Considérons la fonction centrale $f : G \rightarrow \mathbf{Z}$ égale à 1 sur la classe de conjugaison de g et à 0 ailleurs. Elle est dans B donc $\xi(f)$ est une homothétie λId_V . On a

$$\lambda \dim V = \text{Tr}(\xi(f)) = \sum_{\substack{h \in G \\ h \text{ conjugué à } g}} \text{Tr}(\rho(h)) = \sum_{\substack{h \in G \\ h \text{ conjugué à } g}} \chi(h) = c(g)\chi(g)$$

la dernière égalité découlant du fait qu'un caractère est aussi une fonction centrale. Ainsi $\lambda = \frac{c(g)\chi(g)}{\dim V}$. Montrons que ce nombre est un entier algébrique. On a $\lambda = \alpha(\xi(f)) \in \alpha(\xi(B))$. Or $\alpha(\xi(B))$ est un sous-anneau de \mathbf{C} qui est de type fini en tant que groupe abélien (en effet B est de type fini en tant que groupe abélien : il est engendré par les fonctions indicatrices des différentes classes de conjugaisons du groupe fini G). D'après la caractérisation (iii) de la question 29, λ est bien un entier algébrique.

D'autre part $\chi(g)$ est lui aussi un entier algébrique (question 31). Soit u et $v \in \mathbf{Z}$ tels que $d(g) = \text{pgcd}(c(g), \dim V) = uc(g) + v \dim V$, alors

$$\frac{d(g)\chi(g)}{\dim V} = u \frac{c(g)\chi(g)}{\dim V} + v\chi(g)$$

c'est un entier algébrique (car \mathcal{A} est un anneau).

35. a. Soit χ_1, \dots, χ_N les caractères irréductibles de G , avec $\chi_1 = 1$ le caractère trivial. Ils sont associés à des représentations de G notées V_1, \dots, V_N . On exploite l'orthogonalité des colonnes de la table des caractères de G : comme $g_0 \neq e$, on a

$$\sum_{k=1}^N \chi_k(g_0) \overline{\chi_k(e)} = 0.$$

Les $\chi_k(e)$ sont réels ($\chi_k(e) = \dim V_k$), d'où

$$\sum_{k=2}^N \chi_k(g_0) \chi_k(e) = -\chi_1(g_0) \chi_1(e) = -1.$$

Supposons par l'absurde que pour tout $k \in [2, N]$, on ait $\chi_k(g_0) = 0$ ou $\dim V_k \in p\mathbf{Z}$. Alors $\chi_k(g_0) \dim V_k = pa_k$ avec $a_k \in \mathcal{A}$ pour tout k , et on obtient $p(a_2 + \dots + a_N) = -1$, ce qui est absurde car il en résulterait que $1/p = -(a_2 + \dots + a_N)$ serait un entier algébrique (en contradiction avec le résultat de la question 28).

Conclusion : il existe bien une représentation irréductible non triviale V_i de G (avec $i \geq 2$) telle que $\chi_i(g_0) \neq 0$ et $\dim V_i$ premier à p .

b. On a par hypothèse $c(g_0) = p^m$, donc $d(g_0) = \text{pgcd}(c(g_0), \dim V_i) = 1$. D'après la question 34.b, le nombre $a = \frac{\chi_i(g_0)}{\dim V_i} = \frac{d(g_0)\chi_i(g_0)}{\dim V_i}$ est un entier algébrique, et il n'est pas nul par définition de V_i . Notons $n = \dim V_i$ pour abrégier. On sait que $\chi_i(g_0)$ est une somme de racines de l'unité (car $\rho_i(g_0)^{|G|} = \text{Id}_V$, déjà vu à la question 31) : $\chi_i(g_0) = z_1 + \dots + z_n$ avec les $z_k^{|G|} = 1$. On peut alors appliquer à l'entier algébrique non nul $a = \frac{\chi_i(g_0)}{n} = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$ le résultat de la question 32.b, qui nous donne $z_1 = \dots = z_n$. Ainsi l'endomorphisme diagonalisable $\rho_i(g_0)$ a toutes ses valeurs propres égales, c'est une homothétie de V_i .

Supposons pour finir que G est simple. Le morphisme de groupes $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ est non trivial donc son noyau, qui est distingué dans G , est nécessairement réduit à $\{e\}$, si bien que ρ_i est injectif. Pour tout $g \in G$, $\rho_i(g)$ commute avec l'homothétie $\rho_i(g_0)$, donc (par injectivité de ρ_i) g commute avec g_0 . Ainsi g_0 appartient au centre de G . On vient de prouver que G possède un centre non trivial ; comme $Z(G)$ est distingué dans G , on a nécessairement $Z(G) = G$, ce qui signifie que G est abélien.

N.B. Ceci prouve le résultat admis à la question 8.b et complète la preuve du théorème de BURNSIDE sur les groupes résolubles.

Problème d'analyse

I. Résultats préliminaires

1. a. La dérivée de $g(t) = f(t)e^{-at}$ vérifie $g'(t) \leq be^{-at}$. Si $t \in I \cap [0, +\infty[$, on a

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g' \leq \int_0^t be^{-as} ds = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

d'où $f(t) = g(t)e^{at} \leq f(0)e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$.

Si $t \in I \cap]-\infty, 0]$, on a

$$g(0) - g(t) = \int_t^0 g' \leq \int_t^0 be^{-as} ds = \frac{b}{a}(e^{-at} - 1)$$

d'où $f(t) \geq f(0)e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$.

b. Soit $f(t) = \int_0^t \|v'(s)\| ds$, on a $f'(t) = \|v'(t)\| \leq a\|v(t)\| + b$ pour tout $t \in I$, or, pour $t \geq 0$,

$$\|v(t)\| = \left\| v(0) + \int_0^t v'(s) ds \right\| \leq \|v(0)\| + \int_0^t \|v'(s)\| ds = \|v(0)\| + f(t) \quad (\text{a})$$

(d'après l'inégalité triangulaire). Ainsi $f'(t) \leq af(t) + a\|v(0)\| + b$ pour tout $t \in I \cap \mathbf{R}^+$. D'après la question 1.a, il vient $f(t) \leq f(0)e^{at} + (\|v(0)\| + \frac{b}{a})(e^{at} - 1)$ pour tout $t \in I \cap \mathbf{R}^+$, d'où, en réutilisant l'inégalité (a) : $\|v(t)\| \leq \|v(0)\| + f(t) \leq \|v(0)\|e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$.

2. Cours.

3. a. On a, pour tout $t \in [0, t_2[$,

$$\|x'(t)\| = \|F(x(t))\| \leq \|F(x(t)) - F(0)\| + \|F(0)\| \leq L\|x(t)\| + \|F(0)\|,$$

d'où, d'après la question 1.b, $\|x(t)\| \leq \|x(0)\|e^{Lt} + \frac{\|F(0)\|}{L}(e^{Lt} - 1) \leq Me^{Lt}$ avec $M = \|x(0)\| + \frac{\|F(0)\|}{L}$.

b. Si t_2 est fini, l'inégalité précédente montre que la fonction x est bornée sur l'intervalle $[0, t_2[$: $\|x(t)\| \leq Me^{Lt_2}$. Or F est bornée sur la boule fermée $\bar{B}(0, R)$ de rayon $R = Me^{Lt_2}$ (c'est un compact), donc $x' = F \circ x$ est bornée sur $[0, t_2[$. On en déduit que x' est intégrable sur l'intervalle borné $[0, t_2[$. Par conséquent $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s) ds$ a une limite finie z lorsque $t \rightarrow t_2^-$. Puis $x'(t) = F(x(t)) \rightarrow F(z)$ lorsque $t \rightarrow t_2^-$.

c. Si l'on prolonge x par continuité en posant $x(t_2) = z$, alors par le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement est C^1 et $x'(t_2) = F(z) = F(x(t_2))$. La fonction prolongée est alors une solution C^1 du problème de CAUCHY (S) sur l'intervalle $]-t_1, t_2]$, ce qui contredit la maximalité de la solution x . Ainsi $t_2 = +\infty$.

4. a. La fonction $v(t) = \phi_t(x_1) - \phi_t(x_2)$ a pour dérivée $v'(t) = F(\phi_t(x_1)) - F(\phi_t(x_2))$ et de plus $v(0) = x_1 - x_2$ (par définition du flot ϕ_t). Pour $t \geq 0$, on peut écrire $\|v'(t)\| \leq L\|\phi_t(x_1) - \phi_t(x_2)\| = L\|v(t)\|$, et d'après la question 1.b, il vient $\|v(t)\| \leq \|v(0)\|e^{Lt} = \|x_1 - x_2\|e^{Lt}$.

Pour les t négatifs, on renverse le sens du temps en posant $w(t) = \phi_{-t}(x_1) - \phi_{-t}(x_2)$ pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a $w'(t) = -F(\phi_{-t}(x_1)) + F(\phi_{-t}(x_2))$ et on procède comme pour v : $\|w'(t)\| \leq L\|w(t)\|$, d'où $\|w(t)\| \leq \|x_1 - x_2\|e^{Lt}$.

Ainsi on a bien $\|\phi_t(x_1) - \phi_t(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|e^{L|t|}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

b. Fixons $(t, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$. Pour (s, x) au voisinage de (t, x_0) , on a

$$\|\phi_s(x) - \phi_t(x_0)\| \leq \|\phi_s(x) - \phi_s(x_0)\| + \|\phi_s(x_0) - \phi_t(x_0)\| \leq e^{L|s|}\|x - x_0\| + \|\phi_s(x_0) - \phi_t(x_0)\|.$$

Lorsque (s, x) tend vers (t, x_0) , on a $e^{L|s|}\|x - x_0\| \rightarrow 0$ et $\phi_s(x_0) \rightarrow \phi_t(x_0)$ (puisque la solution $s \mapsto \phi_s(x_0)$ du problème de CAUCHY (S) est de classe C^1), donc $\|\phi_s(x_0) - \phi_t(x_0)\| \rightarrow 0$. On conclut que $\|\phi_s(x) - \phi_t(x_0)\| \rightarrow 0$ et la continuité de ϕ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ est prouvée.

5. a. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^d$ et $s \in \mathbf{R}$. La fonction $f : t \mapsto \phi_t(\phi_s(x_0))$ est la solution du problème de CAUCHY

$$(S') \quad \begin{cases} y'(t) = F(y(t)) \\ y(0) = \phi_s(x_0). \end{cases}$$

La fonction $g : t \mapsto \phi_{t+s}(x_0)$ est elle aussi solution de (S') . Or d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ le problème de CAUCHY (S') possède une unique solution maximale, donc les fonctions f et g coïncident sur \mathbf{R} , ainsi $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

b. On a en particulier $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0 = \text{Id}_{\mathbf{R}^d}$ et de même $\phi_{-t} \circ \phi_t = \text{Id}_{\mathbf{R}^d}$, donc ϕ_t et ϕ_{-t} sont deux bijections de \mathbf{R}^d sur \mathbf{R}^d , réciproques l'une de l'autre. Elles sont toutes les deux continues (d'après la question 4.a), donc ϕ_t est un homéomorphisme de \mathbf{R}^d sur \mathbf{R}^d .

6. a. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$: il existe $P \in \text{GL}_d(\mathbf{C})$ et $T \in \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ triangulaire supérieure telles que $T = PAP^{-1}$. Soit $\delta > 0$ et $D = \text{diag}(\delta, \dots, \delta^d)$. Alors $T' = DTD^{-1}$ a pour coefficients les $t'_{ij} = \delta^i t_{ij} \delta^{-j} = \delta^{i-j} t_{ij}$. Or $t_{ij} = 0$ si $i > j$, et pour $j > i$, $|t'_{ij}| = \delta^{i-j} |t_{ij}| \leq M/\delta$, où $M = \max_{1 \leq i, j \leq d} |t_{ij}|$. Si $\delta > M/\varepsilon$, les coefficients non diagonaux de T' sont de module inférieur à ε . Alors $T_\varepsilon = T'$ et $P_\varepsilon = DP$ conviennent.

b. Soit $v \in \mathbf{R}^d$ et $z = P_\varepsilon v \in \mathbf{C}^d$. On note P_ε^* et z^* les matrices adjointes (conjuguée de la transposée). Alors $\|v\|_\varepsilon^2 = \text{Re}(z^* z) = z^* z = \sum_{k=1}^d |z_k|^2$ et $\langle\langle v, Av \rangle\rangle_\varepsilon = \text{Re}(v^* P_\varepsilon^* P_\varepsilon Av)$. Or $P_\varepsilon A = T_\varepsilon P_\varepsilon$, donc

$$\begin{aligned} \langle\langle v, Av \rangle\rangle_\varepsilon &= \text{Re}(v^* P_\varepsilon^* T_\varepsilon P_\varepsilon v) = \text{Re}(z^* T_\varepsilon z) \\ &= \text{Re} \left(\sum_{1 \leq k, l \leq d} t_{kl} \bar{z}_k z_l \right) \end{aligned}$$

où les t_{kl} sont les coefficients de T_ε : $t_{kl} = 0$ si $k > l$, $|t_{kl}| \leq \varepsilon$ si $k < l$ et $\text{Re}(t_{kk}) < 0$. On obtient

$$\langle\langle v, Av \rangle\rangle_\varepsilon \leq \sum_{1 \leq k < l \leq d} \varepsilon |z_k| |z_l| + \sum_{k=1}^d \text{Re}(t_{kk}) |z_k|^2.$$

On a $|z_k| |z_l| \leq \frac{|z_k|^2 + |z_l|^2}{2} \leq z^* z$; en notant $u = \max(\text{Re}(t_{11}), \dots, \text{Re}(t_{dd})) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{Re}(\lambda) < 0$, il vient

$$\langle\langle v, Av \rangle\rangle_\varepsilon \leq \sum_{1 \leq k < l \leq d} \varepsilon (z^* z) + u \sum_{k=1}^d |z_k|^2 = \frac{d(d-1)}{2} \varepsilon (z^* z) + u (z^* z).$$

On choisit ε assez petit de sorte que $\frac{d(d-1)}{2} \varepsilon \leq -\frac{u}{2}$ par exemple (on rappelle que $u < 0$ et u ne dépend que de A), ce qui donne $\langle\langle v, Av \rangle\rangle_\varepsilon \leq \frac{u}{2} (z^* z) = -\frac{|u|}{2} \|v\|_\varepsilon^2$ (avec $\alpha = \frac{|u|}{2}$).

7. a. La fonction $t \mapsto \phi_t(x_0) - a$ est de classe C^1 , de dérivée $F(\phi_t(x_0))$. L'application $N : x \mapsto \|x\|^2$ est C^1 sur \mathbf{R}^d (car le carré d'une norme euclidienne est une fonction polynomiale); sa différentielle en x est $DN(x)h = 2\langle\langle x, h \rangle\rangle$. Par composition, on calcule la dérivée

$$\frac{d}{dt} \|\phi_t(x_0) - a\|^2 = 2 \left\langle\left\langle \phi_t(x_0) - a, F(\phi_t(x_0)) \right\rangle\right\rangle.$$

Considérons le développement limité de F en a à l'ordre 1 : $F(x) = F(a) + DF(a)(x - a) + r(x - a) = A(x - a) + r(x - a)$, avec $r(h) = o(h)$ au voisinage de 0. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\phi_t(x_0) - a\|^2 &= 2 \left\langle \left\langle \phi_t(x_0) - a, A(\phi_t(x_0) - a) \right\rangle \right\rangle + 2 \left\langle \left\langle \phi_t(x_0) - a, r(\phi_t(x_0) - a) \right\rangle \right\rangle \\ &\leq -2\alpha \|\phi_t(x_0) - a\|^2 + 2 \|\phi_t(x_0) - a\| \cdot \|r(\phi_t(x_0) - a)\| \end{aligned}$$

(on a utilisé la propriété (1) du produit scalaire et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ). Sachant que $r(h) = o(h)$ au voisinage de 0, il existe $\eta > 0$ tel que : $\|h\| \leq \eta \implies \|r(h)\| \leq \frac{\alpha}{2} \|h\|$. En reportant dans l'inégalité précédente (avec $h = \phi_t(x_0) - a$), on obtient exactement le résultat voulu.

b. On a $0 \in J$ (car $x_0 \in V$). Vu sa définition, J est un intervalle de la forme $[0, T]$ ou $[0, T[$ (avec T éventuellement infini).

On a donc, pour tout $t \in [0, T[$, $\|\phi_t(x_0) - a\| < \eta$, d'où $\frac{d}{dt} \|\phi_t(x_0) - a\|^2 \leq -\alpha \|\phi_t(x_0) - a\|^2$. Le lemme de GRÖNWALL (question 1.a) entraîne alors : $\|\phi_t(x_0) - a\|^2 \leq \|x_0 - a\|^2 e^{-\alpha t}$.

Supposons par l'absurde $T < +\infty$. En faisant tendre t vers T^- , il vient $\|\phi_T(x_0) - a\| \leq \|x_0 - a\| e^{-\alpha T/2} < \eta$. Par continuité du flot, on aura alors $\|\phi_t(x_0) - a\| < \eta$ pour tout $t \in [T, T + \delta]$ (pour un $\delta > 0$ assez petit), si bien que $T + \delta \in J$, ce qui contredit la définition de T .

On conclut que $J = \mathbf{R}^+$, et de plus le calcul ci-dessus montre que l'on a, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $\|\phi_t(x_0) - a\| \leq \|x_0 - a\| e^{-\alpha t/2}$, donc $\phi_t(x_0)$ tend vers a lorsque $t \rightarrow +\infty$ (exponentiellement vite).

II. L'équation du pendule

8. La fonction $F_q : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin \theta - q\omega \end{pmatrix}$ convient.

La fonction F_q est de classe C^1 sur \mathbf{R}^2 donc le problème de CAUCHY considéré possède une unique solution maximale (d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ). Montrons que cette solution est définie sur \mathbf{R} . La fonction F_q est globalement lipschitzienne : pour tous $x_1 = (\theta_1, \omega_1)$ et $x_2 = (\theta_2, \omega_2) \in \mathbf{R}^2$ (en écrivant les vecteurs en ligne par commodité), on a $F(x_1) - F(x_2) = (\omega_1 - \omega_2, \sin \theta_2 - \sin \theta_1 + q(\omega_2 - \omega_1))$, d'où

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_\infty \leq \max(|\omega_1 - \omega_2|, |\theta_1 - \theta_2| + q|\omega_1 - \omega_2|) \leq (1 + q)\|x_1 - x_2\|_\infty.$$

D'après les résultats de la question 3, la solution du problème de CAUCHY $x' = F_q \circ x$, $x(0) = (-\theta_0, 0)$ est définie sur \mathbf{R} , autrement dit la solution de (P) est définie sur \mathbf{R} .

9. Le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système différentiel : $F_q(0, 0) = (0, 0)$. Montrons qu'il est attractif. Les dérivées partielles de F_q en $(0, 0)$ sont $\frac{\partial F_q}{\partial \theta}(0, 0) = (0, -1)$ et $\frac{\partial F_q}{\partial \omega}(0, 0) = (1, -q)$, d'où la matrice jacobienne :

$$DF_q(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -q \end{pmatrix}.$$

On calcule ses valeurs propres, on obtient $(-q \pm \sqrt{\Delta})/2$, avec $\Delta = q^2 - 4$. Si $\Delta < 0$, les deux valeurs propres ont pour partie réelle $-q/2 < 0$; si $\Delta \geq 0$, les deux valeurs propres sont réelles < 0 (car $\sqrt{\Delta} < q$). Dans tous les cas, les hypothèses de la question 7 sont remplies : F_q est C^1 , lipschitzienne, $F_q(0, 0) = (0, 0)$ et $DF_q(0, 0)$ est à valeurs propres de parties réelles strictement négatives. On en déduit que $(0, 0)$ est un point d'équilibre attractif : si $x(0) = (-\theta_0, 0)$ est assez proche de $(0, 0)$ (c'est-à-dire si θ_0 est assez petit), alors $x(t) \rightarrow (0, 0)$ quand $t \rightarrow +\infty$, i.e. $\theta(t)$ et $\theta'(t)$ tendent vers 0.

10. On multiplie l'équation $\theta'' + \sin \theta = 0$ par θ' , cela donne $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\theta'^2) - \frac{d}{dt} (\cos \theta) = 0$, puis on intègre : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\theta'(t)^2 - 2 \cos \theta(t) = \theta'(0)^2 - 2 \cos \theta(0)$, i.e. $\theta'(t)^2 = 2(\cos \theta(t) - \cos \theta_0)$.

On en déduit que $\cos \theta(t) \geq \cos \theta_0$ pour tout t , donc θ est à valeurs dans $E = \cos^{-1}([\theta_0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [-\theta_0 + 2k\pi, \theta_0 + 2k\pi]$. Les composantes connexes de E sont précisément les segments $[-\theta_0 + 2k\pi, \theta_0 + 2k\pi]$; comme la fonction θ est continue sur \mathbf{R} , elle prend toutes ses valeurs dans une même composante connexe de E , à savoir celle qui contient $\theta(0)$, d'où $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

11. a. La fonction $\gamma \mapsto (\cos \gamma - \cos \theta_0)^{-1/2}$ est continue sur $]-\theta_0, \theta_0[$; un développement limité en θ_0 donne : $(\cos \gamma - \cos \theta_0)^{-1/2} \underset{\gamma \rightarrow \theta_0^-}{\sim} ((\theta_0 - \gamma) \sin \theta_0)^{-1/2} = \frac{C^{te}}{\sqrt{\theta_0 - \gamma}}$ donc cette fonction est intégrable au voisinage de θ_0 . Par parité, elle l'est aussi en $-\theta_0$, si bien que $\tau < +\infty$.

On a $\theta''(0) = \sin \theta_0 > 0$ (on rappelle que $0 < \theta_0 < \pi$) et $\theta'(0) = 0$, donc $\theta'(s) \sim s \sin \theta_0$ au voisinage de 0, si bien qu'il existe $t > 0$ assez petit tel que $\theta' > 0$ sur $]0, t]$. Ainsi $I \neq \emptyset$.

Soit $t \in I$, on peut écrire, pour tout $s \in]0, t]$: $\theta'(s) = \sqrt{2(\cos \theta(s) - \cos \theta_0)} > 0$, d'où

$$\int_0^t \frac{\theta'(s)}{\sqrt{2(\cos \theta(s) - \cos \theta_0)}} ds = \int_0^t ds = t.$$

On effectue le changement de variable $\gamma = \theta(s)$ (bijection C^1 de $]0, t]$ sur $]-\theta_0, \theta(t)]$) :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta_0}}. \quad (\text{b})$$

Vu que $\theta(t) \leq \theta_0$, il vient $t \leq \tau$, ainsi I est majoré par τ .

b. Soit $\sigma = \sup I$. On a $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in I$ donc $\theta'(\sigma) \geq 0$; si on avait $\theta'(\sigma) > 0$, alors par continuité il viendrait $\theta' > 0$ au voisinage de σ et σ ne serait pas la borne supérieure de I . Donc $\theta'(\sigma) = 0$.

L'intégrale première de la question 10 donne alors $\theta'(\sigma)^2 = 0 = 2(\cos \theta(\sigma) - \cos \theta_0)$, i.e. $\cos \theta(\sigma) = \cos \theta_0$, d'où $\theta(\sigma) = \pm \theta_0$. Comme $\theta' > 0$ sur l'intervalle $]0, \sigma[$, on a $\theta(\sigma) > \theta(0) = -\theta_0$, donc $\theta(\sigma) = \theta_0$.

Enfin on fait tendre t vers σ^- dans l'égalité (b) de la question 11.a, ce qui donne

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta(\sigma)} \frac{d\gamma}{\sqrt{\cos \gamma - \cos \theta_0}} = \tau$$

(vu que $\theta(\sigma) = \theta_0$).

c. Les fonctions $\psi_1 : t \mapsto \theta(\tau + t)$ et $\psi_2 : t \mapsto \theta(\tau - t)$ sont solutions du même problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \psi''(t) + \sin \psi(t) = 0 \\ \psi(0) = \theta(\tau) \\ \psi'(0) = 0 \end{cases}$$

(car $\theta'(\tau) = 0$), donc elles sont égales.

Pour $t = \tau$, on en déduit que $\theta(2\tau) = \theta(0)$ et $\theta'(2\tau) = -\theta'(0) = 0$. On montre ensuite de la même façon que les fonctions $t \mapsto \theta(t)$ et $t \mapsto \theta(t + 2\tau)$ sont égales (elles sont toutes les deux solutions du problème de CAUCHY (P_0)). Ainsi θ est 2τ -périodique. C'est la plus petite période, en effet θ est strictement croissante sur $[0, \tau]$ donc $\theta(t) > \theta(0)$ sur $]0, \tau]$, et aussi sur $[\tau, 2\tau[$ grâce à l'égalité de ψ_1 et ψ_2 , donc le plus petit $t > 0$ tel que $\theta(t) = \theta(0)$ est 2τ .

12. La relation trigonométrique $\cos \gamma - \cos \theta_0 = 2 \sin\left(\frac{\theta_0 + \gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_0 - \gamma}{2}\right)$ et le changement de variable $\gamma = s\theta_0$ dans l'intégrale mènent au résultat voulu avec $A = 2$.

13. On note pour alléger les calculs $f(s, \theta_0) = \theta_0 \left[\sin\left(\frac{(1+s)\theta_0}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-s)\theta_0}{2}\right) \right]^{-1/2}$.

- Pour tout $s \in [0, 1[$, $\lim_{\theta_0 \rightarrow 0^+} f(s, \theta_0) = 2(1 - s^2)^{-1/2}$, et si $0 < \theta_0 \leq \pi/2$, on dispose de la domination

$$f(s, \theta_0) \leq \theta_0 \left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{(1+s)\theta_0}{2} \right) \times \frac{2}{\pi} \left(\frac{(1-s)\theta_0}{2} \right) \right]^{-1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-s^2}}$$

(grâce à l'inégalité de concavité $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$). La fonction $s \mapsto (1-s^2)^{-1/2}$ étant intégrable sur $[0, 1[$, on en déduit par convergence dominée que

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0^+} T(\theta_0) = 4 \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = 4 \operatorname{Arcsin} 1 = 2\pi.$$

- D'autre part, lorsque θ_0 tend vers π^- , il résulte du lemme de FATOU que l'on a (dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$) :

$$\int_0^1 \liminf_{\theta_0 \rightarrow \pi^-} f(s, \theta_0) ds \leq \liminf_{\theta_0 \rightarrow \pi^-} \int_0^1 f(s, \theta_0) ds.$$

Or

$$\liminf_{\theta_0 \rightarrow \pi^-} f(s, \theta_0) = \pi \left[\sin \left(\frac{(1+s)\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{(1-s)\pi}{2} \right) \right]^{-1/2} = \pi \sin \left(\frac{(1-s)\pi}{2} \right)^{-1} = g(s)$$

(les deux sinus sont égaux car $\frac{(1+s)\pi}{2} + \frac{(1-s)\pi}{2} = \pi$); au voisinage de $s = 1$, la fonction $g(s)$ est équivalente à $\frac{2}{1-s}$, donc $\int_0^1 g(s) ds = +\infty$. On obtient $\liminf_{\theta_0 \rightarrow \pi^-} \int_0^1 f(s, \theta_0) ds \geq +\infty$, ce qui revient à dire que $\lim_{\theta_0 \rightarrow \pi^-} T(\theta_0) = +\infty$.

14. a. On majore la somme à l'aide d'intégrales : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n^2\pi^2 + r} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2\pi^2 + r}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 + r} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2\pi^2 + r} = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2\pi^2 + 1} = \frac{C}{\sqrt{r}} \quad (t = u\sqrt{r})$$

b. La fonction σ est la somme d'une série de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$. Il suffit de prouver la convergence uniforme de cette série sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$ pour pouvoir conclure que σ est holomorphe (car l'holomorphicité est préservée par limite uniforme).

Soit K un compact contenu dans $\mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$ et N un entier tel que K soit contenu dans le disque $D(0, N\pi)$. La série $\sum_{n \geq N+1} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right)$ est normalement convergente sur le disque $D(0, N\pi)$ en effet, pour tout $n \geq N+1$,

$$\sup_{|z| < N\pi} \left| \frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right| = \sup_{|z| < N\pi} \left| \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} \right| \leq \frac{2N\pi}{(n^2 - N^2)\pi^2}.$$

On en déduit aussitôt la convergence uniforme sur K de la série qui définit σ .

c. Comme précédemment, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \right)$ est normalement convergente sur le disque $D(0, 1)$ (on domine par $\frac{2}{n^2\pi^2 - 1}$), donc sa somme est continue sur ce disque. Cela signifie que $\sigma(z) - \frac{1}{z}$ possède une limite finie en 0. D'autre part un développement limité en 0 de la cotangente donne $\sigma(z) - \cotan z = \sigma(z) - \frac{1}{z} + o(1)$, ainsi Δ est prolongeable par continuité en 0.

La fonction cotangente est π -périodique ; montrons que σ l'est aussi : pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \pi\mathbf{Z}$, on a

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z + n\pi} ; \\ \sigma(z + \pi) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{z + n\pi} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=-N}^N \frac{1}{z + n\pi} - \frac{1}{z - N\pi} + \frac{1}{z + (N+1)\pi} \right) = \sigma(z).\end{aligned}$$

Par conséquent Δ est π -périodique sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. On en déduit qu'elle est prolongeable par continuité en tout point de \mathbf{Z} (puisque'elle l'est en 0). Enfin l'imparité est évidente.

d. On pose $z = x + iy$, avec $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ et par exemple $y \geq \pi$ (le cas $y \leq -\pi$ est analogue par imparité). On a d'une part

$$|\cotan z| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}} \right| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{1}{\operatorname{th} y} \leq \frac{1}{\operatorname{th} \pi},$$

et d'autre part, pour σ :

$$|\sigma(z)| \leq \frac{1}{|z|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|z|}{|z^2 - n^2\pi^2|};$$

on a $z^2 - n^2\pi^2 = x^2 - y^2 - n^2\pi^2 + 2ixy$ donc $|z^2 - n^2\pi^2| \geq n^2\pi^2 + y^2 - x^2$, et à l'aide de la question 14.a,

$$|\sigma(z)| \leq \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|z|}{n^2\pi^2 + y^2 - x^2} \leq \frac{1}{\pi} + \frac{2C|z|}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Sachant que $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$|\sigma(z)| \leq \frac{1}{\pi} + \frac{C(\pi + 2y)}{\sqrt{y^2 - \frac{\pi^2}{4}}}$$

et ceci est borné pour $y \in [\pi, +\infty[$ (car la fonction $y \mapsto (\pi + 2y)(y^2 - \frac{\pi^2}{4})^{-1/2}$ est continue sur cet intervalle et converge quand $y \rightarrow +\infty$). Ainsi σ et la cotangente sont bornées sur le domaine considéré, Δ aussi.

e. La fonction Δ est continue sur le compact défini par $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|y| \leq \pi$, donc elle y est bornée. Joint au résultat de la question précédente, ceci prouve que Δ est bornée sur la bande d'équation $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. En outre Δ est π -périodique, elle est donc bornée sur \mathbf{C} .

Par ailleurs Δ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ et continue en tout point de \mathbf{Z} ; ceci entraîne qu'elle est holomorphe sur \mathbf{C} (les points de $\pi\mathbf{Z}$ sont des singularités effaçables).

On conclut à l'aide du théorème de Liouville que Δ est constante sur \mathbf{C} . Enfin $\Delta(0) = 0$ (par imparité), donc Δ est la fonction nulle.

15. a. La série qui définit $\sigma(z) - \frac{1}{z}$ converge uniformément sur tout compact inclus dans $]-\pi, \pi[$ (vu en 14.b), ce qui permet d'intégrer terme à terme entre 0 et $t \in]0, \pi[$:

$$\int_0^t \left(\sigma(z) - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) dz$$

or $\sigma = \cotan$, ce qui conduit aisément à l'égalité voulue :

$$\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{n\pi}\right) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right).$$

b. Pour $t \in]0, \pi[$,

$$\sqrt{\frac{t}{\sin t}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{k n^2\pi^{2k}}\right)$$

Grâce au théorème de FUBINI-TONELLI, la somme double s'écrit en fait $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k$, avec des coefficients $b_k \geq 0$. La composée de deux séries entières à coefficients positifs est encore une série entière à coefficients positifs :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right)^p = \sum_{k=p}^{+\infty} b_{k,p} t^k \quad \text{avec des coefficients } b_{k,p} \geq 0,$$

puis

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=p}^{+\infty} b_{k,p} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

avec des coefficients $a_k \geq 0$. Tous ces calculs sont licites car ce sont des sommes de termes positifs, qu'on peut donc réordonner et sommer par paquets à loisir.

16. On note $h(t) = \sqrt{\frac{t}{\sin t}}$; alors l'égalité de la question 12 s'écrit, pour tout $\theta_0 \in]-\pi, \pi[$,

$$T(\theta_0) = 4 \int_0^1 h\left(\frac{(1+s)\theta_0}{2}\right) h\left(\frac{(1-s)\theta_0}{2}\right) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}.$$

On remplace h par son expression en série entière et, tout étant positif, on peut intervertir les sommes et l'intégrale :

$$T(\theta_0) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_n a_p \int_0^1 \left(\frac{(1+s)\theta_0}{2}\right)^n \left(\frac{(1-s)\theta_0}{2}\right)^p \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = 4 \sum_{(n,p) \in \mathbf{N}^2} A_{n,p} \theta_0^{n+p}$$

où les $A_{n,p} = a_n a_p 2^{-n-p} \int_0^1 (1+s)^{n-1/2} (1-s)^{p-1/2} ds \geq 0$. Tous les termes sont positifs, donc la somme double peut être réarrangée en regroupant par puissance de θ_0 sous la forme $\sum_{k \in \mathbf{N}} c_k \theta_0^k$, avec des coefficients $c_k \geq 0$.

III. Conjugaison topologique de flots

17. a. La solution du problème de CAUCHY $x'(t) = \text{th } x(t)$, $x(0) = x_0$ se calcule aisément : on trouve $x(t) = \text{Argsh}(e^t \text{sh } x_0)$ (où Argsh est la fonction argument sinus hyperbolique, bijection réciproque de sh). On en déduit que $\phi_t(x_0) = \text{Argsh}(e^t \text{sh } x_0)$ pour tous t et $x_0 \in \mathbf{R}$.

De même, $\psi_t(x_0) = e^t x_0$.

La fonction $h : x \mapsto \text{sh } x$ est un homéomorphisme de \mathbf{R} sur \mathbf{R} qui conjugue les flots ϕ et ψ .

b. Le flot de $-G$ est $\omega_t(x_0) = e^{-t} x_0$. Supposons par l'absurde l'existence d'un homéomorphisme h tel que $h \circ \phi_t = \omega_t \circ h$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire $h(\text{Argsh}(e^t \text{sh } x)) = e^{-t} h(x)$ pour tous $t, x \in \mathbf{R}$. Prenons $x = 1$ par exemple et $t \rightarrow +\infty$: alors $\text{Argsh}(e^t \text{sh } 1) \rightarrow +\infty$ donc $h \circ \phi_t(1)$ diverge, tandis que $\omega_t \circ h(1) = e^{-t} h(1)$ tend vers 0. L'homéomorphisme h ne peut donc exister.

18. a. Les flots de A et B sont : $\phi_t(x) = e^{tA}x$ et $\psi_t(x) = e^{tB}x$. Si l'on note $x = (x_1, x_2)$, alors $\phi_t(x) = (e^t x_1, e^{-t} x_2)$ et $\psi_t(x) = (e^t x_1, e^{-3t} x_2)$. L'homéomorphisme $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3)$ répond à la question : $h(\phi_t(x)) = (e^t x_1, e^{-3t} x_2^3) = \psi_t(h(x))$ pour tous t et x .

b. Supposons par l'absurde qu'il existe un difféomorphisme h tel que $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$ pour tout t , i.e. $(\diamond) h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x)$ pour tous t et x . Pour $x = 0$, on a $h(0) = e^{tB}h(0)$, or le seul point fixe du flot ψ est 0 donc $h(0) = 0$. On dérive l'égalité (\diamond) par rapport à t (à x fixé) : $Dh(e^{tA}x)(Ae^{tA}x) = Be^{tB}h(x)$; en particulier pour $t = 0$ on obtient l'égalité $(\heartsuit) : Dh(x)(Ax) = Bh(x)$. Ensuite on calcule un développement limité à l'ordre 1 de chaque membre de (\heartsuit) quand $x \rightarrow 0$: $Bh(x) = Bh(0) + B Dh(0)x + o(x) = B Dh(0)x + o(x)$; d'autre part $\|Dh(x)(Ax) - Dh(0)(Ax)\| \leq \| \|Dh(x) - Dh(0)\| \|Ax\| = o(x)$ (car $\| \|Dh(x) - Dh(0)\| \|Ax\| \rightarrow 0$ et $\|Ax\| = O(x)$), donc $Dh(x)(Ax) = Dh(0)(Ax) + o(x)$. En égalisant les différentielles en 0 dans (\heartsuit) , on obtient $Dh(0)(Ax) = B Dh(0)x$. Ceci est vrai pour tout vecteur x , donc on a l'égalité de matrices $PA = BP$, où $P = Dh(0)$. Or $P \in \text{GL}_d(\mathbf{R})$ (car h est un difféomorphisme) donc $A = P^{-1}BP$ est semblable à B , ce qui est absurde.

19. Notons ϕ^0 et ϕ^1 les flots de F_0 (non amorti) et F_1 (amorti). Soit $x = (-\theta_0, 0)$ avec $\theta_0 \in]0, \pi[$, alors la fonction $t \mapsto \phi_t^0(x)$ est périodique (non constante) d'après l'étude de II.B (question 11.c). Pour ϕ^1 au contraire, on a vu que le point d'équilibre $(0, 0)$ est attractif (question 8), donc il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|x\| \leq \eta$, alors $\phi_t^1(x)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Supposons par l'absurde qu'il existe un homéomorphisme h tel que $h \circ \phi_t^0 = \phi_t^1 \circ h$ pour tout t et tel que $h(0, 0) = (0, 0)$. On prend $\theta_0 > 0$ assez petit pour que $\|h(-\theta_0, 0)\| \leq \eta$, alors $\phi_t^1 \circ h(-\theta_0, 0) \rightarrow 0$, tandis que $h \circ \phi_t^0(-\theta_0, 0)$ est périodique, ce qui est contradictoire.

20. Calcul assez similaire à celui de la question 7.a : on dérive $\|\phi_t(x)\|^2$ par rapport à t en utilisant le fait que la norme est euclidienne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\phi_t(x)\|^2) &= 2 \left\langle \left\langle \phi_t(x), \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right\rangle \right\rangle = 2 \left\langle \left\langle \phi_t(x), F(\phi_t(x)) \right\rangle \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \left\langle \phi_t(x), A\phi_t(x) \right\rangle \right\rangle + 2 \left\langle \left\langle \phi_t(x), (F - A)(\phi_t(x)) \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

La fonction $F - A$ est $\frac{\alpha}{2}$ -lipschitzienne et nulle en 0, donc $\|(F - A)(y)\| \leq \frac{\alpha}{2}\|y\|$ pour tout y , d'où, en utilisant en outre la propriété (1) du produit scalaire et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\frac{d}{dt} (\|\phi_t(x)\|^2) \leq -2\alpha\|\phi_t(x)\|^2 + \alpha\|\phi_t(x)\|^2 = -\alpha\|\phi_t(x)\|^2.$$

On applique le lemme de GRÖNWALL (question 1.a), qui fournit exactement les deux inégalités souhaitées pour $t \geq 0$ et $t \leq 0$.

Enfin on remarque que $\phi_t(x) \neq 0$ pour tout t (d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, si $\phi_t(x)$ s'annule pour un t , alors c'est la solution nulle pour tout $t \in \mathbf{R}$). Par conséquent la fonction $t \mapsto \|\phi_t(x)\|$ est strictement décroissante (puisque $\frac{d}{dt} (\|\phi_t(x)\|^2) < 0$); de plus les deux inégalités fournies par le lemme de GRÖNWALL montre que $\|\phi_t(x)\|$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ et vers $+\infty$ quand $t \rightarrow -\infty$. C'est donc une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R}_+^* .

21. Le flot de $-\text{Id}$ est : $\psi_t(x) = e^{-t}x$. L'hypothèse de conjugaison s'écrit donc : $\phi_t(h(x)) = h(e^{-t}x)$ pour tous $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}^d$, autrement dit $h(x) = \phi_{-t}(h(e^{-t}x))$. Pour $x \neq 0$, on choisit $t = \ln\|x\|$ et on obtient bien $h(x) = \phi_{-\ln\|x\|}(h(x/\|x\|)) = \phi_{-\ln\|x\|}(x/\|x\|)$.

D'autre part, en prenant $x = h^{-1}(0)$, on a $0 = \phi_t(0) = h(\psi_t(h^{-1}(0)))$ pour tout t , donc $h^{-1}(0)$ reste fixe sous le flot ψ_t , or son seul point fixe est 0, donc $h^{-1}(0) = 0$, i.e. $h(0) = 0$.

22. a. Le flot ϕ est une fonction continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$, par conséquent il est clair que H est continue sur $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$. Prouvons la continuité de H en 0. Pour $\|x\| \leq 1$, l'inégalité de la question 20 (pour

$t = -\ln\|x\| \geq 0$) donne

$$\|H(x)\| \leq e^{\alpha \ln\|x\|/2} \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\|^{\alpha/2}$$

donc $H(x) \rightarrow H(0) = 0$ quand $x \rightarrow 0$.

La vérification du fait que $\phi_t \circ H = H \circ \psi_t$ ne fait pas difficulté : pour tout t et tout $x \neq 0$, $\phi_t(H(x)) = \phi_{t-\ln\|x\|}(x')$ (où $x' = x/\|x\|$ pour abrégier) et $H(\psi_t(x)) = H(e^{-t}x) = \phi_{-\ln\|e^{-t}x\|}(x') = \phi_{t-\ln\|x\|}(x')$.

b. La question consiste à trouver $t \in \mathbf{R}$ tel que $v = \phi_{-t}(x)$ soit de norme 1. Un tel t existe et il est unique car la fonction $t \mapsto \|\phi_t(x)\|$ est une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R}_+^* (question 20).

On a donc $\phi_{\theta(x)}(u(x)) = x$. On applique les inégalités de la question 20 : Si $\theta(x) \geq 0$, il vient $\|x\| = \|\phi_{\theta(x)}(u(x))\| \leq e^{-\alpha\theta(x)/2}$ (car $u(x)$ est unitaire), et si $\theta(x) \leq 0$, l'inégalité est renversée. Dans les deux cas, il en résulte que $|\theta(x)| \leq \frac{2}{\alpha} |\ln\|x\||$.

Continuité de θ et u : Soit (x_n) une suite dans $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, convergeant vers $x \neq 0$. La majoration de $|\theta(x_n)|$ obtenue à l'instant montre que $\theta(x_n)$ est borné ; $u(x_n)$ aussi par définition. On extrait de $(\theta(x_n), u(x_n))$ une sous-suite convergente $(\theta(x_{n_k}), u(x_{n_k}))$, de limite (τ, v) . On a $\|v\| = 1$ bien sûr et

$$\begin{aligned} \phi_\tau(v) &= \lim \phi_{\theta(x_{n_k})}(u(x_{n_k})) && \text{(par continuité de } \phi) \\ &= \lim x_{n_k} = x, \end{aligned}$$

donc $(\tau, v) = (\theta(x), u(x))$. La suite bornée $(\theta(x_n), u(x_n))$ possède donc une unique valeur d'adhérence, égale à $(\theta(x), u(x))$, donc elle converge vers cette valeur. Ainsi les fonctions θ et u sont continues sur $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$.

c. Pour tous $x, y \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} y = H(x) = \phi_{-\ln\|x\|}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &\iff (\theta(y), u(y)) = \left(-\ln\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\right) \\ &\iff \|x\| = e^{-\theta(y)} \text{ et } x = \|x\|u(y), \end{aligned}$$

donc pour $y \neq 0$ donné, il existe un unique x tel que $H(x) = y$, à savoir $x = e^{-\theta(y)}u(y)$. Ceci prouve que H est une bijection de \mathbf{R}^d sur \mathbf{R}^d , dont la réciproque est

$$\begin{cases} H^{-1}(y) = e^{-\theta(y)}u(y) & \text{pour tout } y \neq 0, \\ H^{-1}(0) = 0. \end{cases}$$

La continuité de H^{-1} sur $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ résulte de la continuité de θ et u . Il reste à prouver la continuité en 0. Remarquons d'abord que $H(x) = x$ pour tout x de norme 1, que $\|H(x)\| < 1$ si $\|x\| < 1$ (car $-\ln\|x\| > 0$ et $t \mapsto \|\phi_t(x/\|x\|)\|$ est une fonction strictement décroissante) et de même $\|H(x)\| > 1$ si $\|x\| > 1$. Ainsi H laisse stable la boule $\bar{B}(0, 1)$ ainsi que son complémentaire. Il en va donc de même pour H^{-1} . La restriction de H à $K = \bar{B}(0, 1)$ est donc une bijection continue de K sur K ; par compacité c'est automatiquement un homéomorphisme, en particulier H^{-1} est continue en 0. Finalement, H est bien un homéomorphisme de \mathbf{R}^d sur \mathbf{R}^d .

IV. Conjugaison de difféomorphismes

23. On montre que $\ell + m$ est bijective à l'aide du théorème du point fixe. Pour $x, y \in B$, l'égalité $y = \ell(x) + m(x)$ équivaut à $x = \ell^{-1}(y - m(x))$. La fonction $x \mapsto \ell^{-1}(y - m(x))$ est contractante (de rapport $K\|\ell^{-1}\|_B < 1$) donc elle possède un unique point fixe x dans l'espace de BANACH B , qui est donc l'unique antécédent de y par $\ell + m$.

Il est clair que $\ell + m$ est $(\|\ell\|_B + K)$ -lipschitzienne. Soit $y, y' \in B$ et x, x' leurs antécédents par $\ell + m$, on a $x - x' = \ell^{-1}(y - y' - m(x) + m(x'))$ donc

$$\|x - x'\|_B \leq \|\ell^{-1}\|_B \|y - y'\|_B + K \|\ell^{-1}\|_B \|x - x'\|_B,$$

d'où

$$\|x - x'\|_B \leq \frac{\|\ell^{-1}\|_B}{1 - K \|\ell^{-1}\|_B} \|y - y'\|_B$$

ce qui prouve que $(\ell + m)^{-1}$ est lipschitzienne. Ainsi $\ell + m$ est un homéomorphisme bi-lipschitzien de B sur B .

24. a. Lemme. On munit \mathbf{C}^d de $\|\cdot\|_\infty$. La norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$, notons-la $\|\|\cdot\|\|_\infty$, vérifie, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$,

$$\|\|M\|\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |m_{ij}|.$$

(En fait il ya égalité mais nous n'aurons pas besoin de le savoir).

En effet pour tout $x \in \mathbf{C}^d$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$,

$$\|Mx\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} \left| \sum_{j=1}^d m_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |m_{ij}|.$$

On suppose que les valeurs propres de A sont de module < 1 . Comme à la question 6.a, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trigonaliser $A = PTP^{-1}$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ de sorte que les coefficients non diagonaux de T soient de module $< \varepsilon$. Munissons alors \mathbf{R}^d de la norme $\|x\| = \|P^{-1}x\|_\infty$. Pour la norme subordonnée associée (sur $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$), on a

$$\begin{aligned} \|\|A\|\| &= \sup_{x \in \mathbf{R}^d, \|P^{-1}x\|_\infty \leq 1} \|P^{-1}Ax\|_\infty \\ &\leq \sup_{y \in \mathbf{C}^d, \|y\|_\infty \leq 1} \|P^{-1}APy\|_\infty \quad (y = P^{-1}x) \\ &\leq \sup_{y \in \mathbf{C}^d, \|y\|_\infty \leq 1} \|Ty\|_\infty = \|\|T\|\|_\infty \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |t_{ij}| \\ &\leq \rho(A) + (n-1)\varepsilon \end{aligned}$$

où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A ; il est strictement inférieur à 1 par hypothèse, ce qui permet de choisir $\varepsilon > 0$ de sorte que $\rho(A) + (n-1)\varepsilon < 1$. On obtient ainsi $\|\|A\|\| < 1$.

b. On factorise le polynôme caractéristique de A en séparant les valeurs propres selon que leur module est plus grand ou plus petit que 1 : $\chi_A = P_a P_r$ où

$$P_a = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| < 1} (X - \lambda)^{m(\lambda)}, \quad P_r = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| > 1} (X - \lambda)^{m(\lambda)},$$

les $m(\lambda)$ désignant les multiplicités des valeurs propres complexes de A . Les deux polynômes P_a et P_r sont à coefficients réels, en effet si λ est une valeur propre de A de module < 1 par exemple, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A de module < 1 et $m(\lambda) = m(\bar{\lambda})$. Ainsi $P_a = \overline{P_a}$; de même pour P_r . De plus ces deux polynômes sont premiers entre eux (pas de racine commune dans \mathbf{C}), donc par le

lemme des noyaux (et le théorème de Cayley-Hamilton), on a $\mathbf{R}^d = E_a \oplus E_r$ où $E_a = \text{Ker } P_a(A)$ et $E_r = \text{Ker } P_r(A)$. Ces deux sous-espaces de \mathbf{R}^d sont stables par A .

Considérons A_a l'induit de A sur E_a . Il est annulé par le polynôme P_a donc ses valeurs propres complexes sont de module < 1 . D'après la question 24.a, il existe une norme $\|\cdot\|_a$ sur E_a telle que $\|A_a\| < 1$. De même, les valeurs propres complexes de A_r sont de module > 1 , celles de son inverse sont de module < 1 et il existe une norme $\|\cdot\|_r$ sur E_r telle que $\|A_r^{-1}\| < 1$. Il suffit pour finir de normer \mathbf{R}^d en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $\|x\| = \|x_a\|_a + \|x_r\|_r$, où $x = x_a + x_r$ est la décomposition de x dans $E_a \oplus E_r$.

25. Raisonnons avec f_1 . D'après la question 23, elle est bijective de \mathbf{R}^d sur \mathbf{R}^d . Montrons que sa différentielle en tout point $x \in \mathbf{R}^d$ est inversible. On a $Df_1(x) = A + Dg_1(x)$ et $\|Dg_1(x)\| \leq \varepsilon$, en effet pour tout $h \in \mathbf{R}^d$ et tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on a $\|f_1(x + th) - f_1(x)\| \leq \varepsilon t \|h\|$, d'où

$$\|Dg_1(x)h\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \|f_1(x + th) - f_1(x)\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Comme $\varepsilon \|A^{-1}\| < 1$, la matrice $A + Dg_1(x)$ est inversible (cela résulte aussi de la question 23, ou plus simplement, en notant $B = A^{-1}Dg_1(x)$, du fait que $I_d + B$ est inversible car $\|B\| < 1$, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} B^k$, donc $Df_1(x) = A(I_d + B)$ est inversible).

Le théorème d'inversion locale, appliqué à f_1 , bijection de classe C^1 , montre alors que f_1 est un C^1 -difféomorphisme de \mathbf{R}^d sur \mathbf{R}^d .

26. Les espaces B_a et B_r (munis de $\|\cdot\|_B$) sont des espaces de BANACH.

On applique le résultat de la question 23 à L_r avec $\ell_r : \varphi \mapsto -A_r \circ \varphi$ et $m_r : \varphi \mapsto \varphi \circ f_1$ (avec $\varphi \in B_r$). L'endomorphisme $\ell_r \in \mathcal{L}(B_r)$ est continu et inversible d'inverse $\ell_r^{-1} : \varphi \mapsto -A_r^{-1} \circ \varphi$, et $\|\ell_r^{-1}\| \leq \|A_r^{-1}\|$. L'application m_r est linéaire et 1-lipschitzienne ($\|\varphi \circ f_1\|_B \leq \|\varphi\|_B$). Comme $1 \times \|A_r^{-1}\| < 1$, $L_r = \ell_r + m_r$ est une bijection bi-lipschitzienne de B_r sur B_r , ce qui signifie que $L_r \in \mathcal{L}(B_r)$ et $L_r^{-1} \in (B_r)$.

On procède de manière similaire avec L_a mais en échangeant les rôles des deux termes : posons $\ell_a : \varphi \mapsto \varphi \circ f_1$ (dans B_a cette fois) et $m_a : \varphi \mapsto -A_a \circ \varphi$. Alors $\ell_a \in \mathcal{L}(B_a)$ est continu et inversible, d'inverse $\ell_a^{-1} : \varphi \mapsto \varphi \circ f_1^{-1}$ et $\|\ell_a^{-1}\| = 1$; m_a est $\|A_a\|$ -lipschitzienne. Comme $1 \times \|A_a\| < 1$, $L_a = \ell_a + m_a$ est une bijection bi-lipschitzienne de B_a sur B_a .

Sachant que $B = B_a \oplus B_r$, il en découle immédiatement que $L = L_a \oplus L_r$ est inversible, d'inverse $L^{-1} = L_a^{-1} \oplus L_r^{-1}$. On vérifie sans peine la continuité de L : pour toute fonction $f = f_a + f_r \in B_a \oplus B_r$,

$$\begin{aligned} \|L(f)\|_B &= \|L_a(f_a) + L_r(f_r)\|_B \leq \|L_a\|_{B_a} \|f_a\|_B + \|L_r\|_{B_r} \|f_r\|_B \\ &\leq (\|L_a\|_{B_a} + \|L_r\|_{B_r}) \max(\|f_a\|_B, \|f_r\|_B) \end{aligned}$$

or, vu la définition de la norme sur \mathbf{R}^d (question 24.b), on a

$$\|f\|_B = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \|f_a(x) + f_r(x)\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} (\|f_a(x)\| + \|f_r(x)\|) \geq \max(\|f_a\|_B, \|f_r\|_B)$$

d'où $\|L(f)\|_B \leq (\|L_a\|_{B_a} + \|L_r\|_{B_r}) \|f\|_B$. Le même argument montre la continuité de L^{-1} . Notons en outre que les normes de tous ces endomorphismes et de leurs inverses, notamment $\|L^{-1}\|_B$, ne dépendent que de $\|A_r^{-1}\|$ et $\|A_a\|$ mais pas de ε . Cette observation servira à la question suivante.

27. L'énoncé comportait une erreur à ce stade : il faut supposer que les fonctions g_1 et g_2 sont bornées (en plus d'être lipschitziennes).

En développant les composées, on écrit

$$(\text{Id} + \varphi) \circ f_1 - f_2 \circ (\text{Id} + \varphi) = L(\varphi) + M(\varphi) + g_1$$

où L est l'automorphisme de la question précédente et $M(\varphi) = -g_2 \circ (\text{Id} + \varphi)$. La fonction $M : B \rightarrow B$ ainsi définie est lipschitzienne : pour tous $\varphi, \psi \in B$,

$$\|M(\varphi) - M(\psi)\|_B = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \|g_2(x + \varphi(x)) - g_2(x + \psi(x))\| \leq \varepsilon \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \|\varphi(x) - \psi(x)\| = \varepsilon \|\varphi - \psi\|_B.$$

Si l'on choisit ε assez petit de sorte que $\varepsilon \|L^{-1}\|_B < 1$, alors d'après la question 23, $L + M$ est une bijection de B sur B , d'où l'existence et l'unicité d'un $\varphi \in B$ tel que $L(\varphi) + M(\varphi) = -g_1$.

28. En supposant ε assez petit, le raisonnement précédent montre que chacune des 4 équations suivantes

$$\begin{aligned} (\text{Id} + \varphi) \circ f_1 &= f_2 \circ (\text{Id} + \varphi) & f_1 \circ (\text{Id} + \psi) &= (\text{Id} + \psi) \circ f_2 \\ (\text{Id} + \chi) \circ f_1 &= f_1 \circ (\text{Id} + \chi) & (\text{Id} + \omega) \circ f_2 &= f_2 \circ (\text{Id} + \omega) \end{aligned}$$

possède une unique solution $\varphi, \psi, \chi, \omega$ dans B . Les deux dernières admettent pour solution évidente $\chi = \omega = 0$.

On remarque que

$$(\text{Id} + \varphi) \circ (\text{Id} + \psi) \circ f_2 = (\text{Id} + \varphi) \circ f_1 \circ (\text{Id} + \psi) = f_2 \circ (\text{Id} + \varphi) \circ (\text{Id} + \psi)$$

et que la fonction $(\text{Id} + \varphi) \circ (\text{Id} + \psi) = \text{Id} + \tilde{\omega}$ avec $\tilde{\omega} = \psi + \varphi \circ (\text{Id} + \psi) \in B$. On a donc $(\text{Id} + \tilde{\omega}) \circ f_2 = f_2 \circ (\text{Id} + \tilde{\omega})$, d'où par unicité $\tilde{\omega} = \omega = 0$. Cela signifie que $(\text{Id} + \varphi) \circ (\text{Id} + \psi) = \text{Id}$. On montre de même que $(\text{Id} + \psi) \circ (\text{Id} + \varphi) = \text{Id}$. Ainsi $\text{Id} + \varphi$ est un homéomorphisme de \mathbf{R}^d sur \mathbf{R}^d , de réciproque $\text{Id} + \psi$.

Conclusion : les difféomorphismes $f_1 = A + g_1$ et $f_2 = A + g_2$ sont conjugués par l'homéomorphisme $h = \text{Id} + \varphi$: on a $h \circ f_1 \circ h^{-1} = f_2$.

Annexe A

Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2021

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
- 107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un \mathbf{C} -espace vectoriel. Exemples.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
- 121 Nombres premiers. Applications.
- 123 Corps finis. Applications.
- 126 Exemples d'équations en arithmétique.
- 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
- 151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 152 Déterminant. Exemples et applications.
- 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 156 Exponentielle de matrices. Applications.
- 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- 162 Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.
- 203 Utilisation de la notion de compacité.
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

- 215** Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbf{R}^n . Exemples et applications.
- 219** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 220** Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.
- 222** Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
- 226** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 228** Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 233** Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.
- 234** Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.
- 235** Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
- 236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 241** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 245** Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.
- 246** Séries de FOURIER. Exemples et applications.
- 250** Transformation de FOURIER. Applications.
- 262** Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 265** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 266** Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.