RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2018

Rapport de jury présenté par : Thierry Goudon
Président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Créé en 2017, le concours spécial réservé aux docteurs connaît en 2018 sa deuxième édition. Ce nouveau concours, ouvert dans l'optique de valoriser l'insertion professionnelle des titulaires d'un doctorat, permet de recruter des professeurs agrégés ayant un parcours professionnel riche, souvent international, une expérience de recherche, des compétences en informatique, etc. Ce concours spécial, s'il ne fait aucune concession à l'exigence sur les connaissances mathématiques, se veut ouvert à des candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline. Il permet de mettre en valeur les qualités spécifiques résultant d'une pratique des mathématiques par la recherche.

Ce rapport vise deux objectifs. D'une part il établit un bilan de la session 2018, notamment en présentant les données statistiques du concours et en discutant les éléments saillants des productions des candidats. On retiendra à cet égard le très bon niveau de la session 2018 qui a mis en valeur des candidats motivés et bien préparés. D'autre part il se veut un document *utile* pour les futurs candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. Ainsi, il fournit :

— un corrigé commenté de l'épreuve écrite d'admissibilité, en indiquant les erreurs les plus fréquentes et les défauts de rédaction observés,

— des recommandations précises pour les épreuves orales d'admission.

Le jury invite les candidats de tous profils, ainsi que les centres de préparation et leurs intervenants, à en faire une lecture attentive et à bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. La consultation du rapport du concours standard, plus détaillé sur les attentes des épreuves d'admission, en est un complément indispensable.

Un certain nombre d'informations utiles sont disponibles sur le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`. On y trouvera de nombreuses archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs et aux candidats, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le concours externe, spécial comme standard, de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation. Le programme du concours spécial reprend à l'identique celui du concours standard. Il est publié sur le site `www.devenirenseignant.gouv.fr/`. Le programme pour l'édition 2019 est accessible à l'URL `http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/13/1/p2019_agreg_ext_maths_929131.pdf`.

Le jury recommande aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Afin de les guider, l'inspection générale collecte les textes réglementaires relatifs aux différentes situations que les lauréats de l'agrégation externe peuvent rencontrer et édite une note indiquant les recommandations correspondantes http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17. Les lauréats de ce concours spécial sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne devraient donc pas être concernés par les procédures de report de stage. De même, les possibilités d'être nommé stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréats du concours spécial (note de service n°. 2018-055 du 23 avril 2018). Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016).

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Le concours spécial docteur, création de la campagne de recrutement 2017, est un concours « jeune », instaurée par le décret n^{o}. 2016-656 du 20 mai 2016. En 2018, cinq disciplines étaient concernées par l'ouverture de postes à ce concours spécial : mathématiques, physique-chimie-option physique (douze postes), biochimie (cinq postes), lettres modernes (douze postes), langues vivantes étrangères : anglais (dix postes). Avec seize postes, la section de mathématiques est celle qui bénéficie du plus grand nombre de postes ouverts à cette session 2018. Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site https://www.legifrance.gouv.fr/. Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de leçon de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinguer les thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités), une épreuve de modélisation et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours. Les candidats ont le choix entre quatre options

— probabilités et statistiques,
— calcul scientifique,
— algèbre et calcul formel,
— informatique,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation. Comme pour le concours standard, le classement est indépendant de l'option ; le choix de cette option doit être uniquement guidé par les goûts et les compétences des candidats.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans la troisième épreuve orale. Il est important de savoir que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne, d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, le format de l'épreuve permet d'attirer des candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils auront l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

L'épreuve écrite d'admissibilité s'est déroulée le 22 mars 2018. Les candidats sont libres de s'inscrire à la fois au concours standard et au concours spécial ; toutefois, les épreuves écrites ayant lieu au même moment, il leur faut déterminer finalement à quel concours ils souhaitent se présenter. Le jury conseille d'effectuer ce choix en évaluant quelles épreuves permettent au candidat de mieux se mettre en valeur, en fonction de son parcours et de sa préparation, toute autre considération, par exemple liée à la gestion des carrières, paraissant particulièrement hypothétique.

La liste des candidats admissibles a été publiée le 18 mai 2018. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées concomitamment à celles du concours standard de l'agrégation externe à Lille, au lycée Pasteur. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué. Les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts. On remarquera que la composition du jury respecte une exacte parité hommes/femmes et l'ensemble des commissions d'interrogation étaient aussi exactement équilibrées.

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2018

2.2.1 Commentaires généraux

Le nombre d'inscrits au concours spécial s'élève à 279 et 109 candidats se sont présentés à l'épreuve écrite. À l'issue de la délibération d'écrit, 37 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une note de 20/20 et le dernier une note de 5,5/20. Si la barre d'admissibilité est en très légère augmentation par rapport à 2017, le fait remarquable réside surtout en un nombre accru de candidats l'ayant dépassée. Le jury se réjouit de cette marque d'attractivité et de qualité du concours. Avec toutes les précautions d'usage sur la comparaison entre deux concours différents, le jury estime que tous ces candidats auraient largement eu leur place parmi les admissibles du concours standard et que les meilleures copies du concours spécial s'y seraient placées à un très bon, si ce n'est excellent, rang. À l'issue des épreuves orales, les délibérations du jury ont conduit à retenir les 15 candidats qui avaient franchi la note moyenne de 8,66/20 ; le premier du concours présente une moyenne de 18,2/20 et le premier candidat non admis a une moyenne de 7,66. Pour mémoire, en 2017, seuls 10 candidats avaient obtenu une moyenne supérieure à la barre d'admission fixée à 8/20 et la tête du concours atteignait 14,5/20. Le jury se réjouit du bon niveau de préparation des candidats admissibles et des efforts de présentation du dossier. On notera que la moyenne du dernier admis est sensiblement supérieure à la moyenne du dernier admis du concours standard, signe supplémentaire d'une session 2018 très satisfaisante et d'un niveau relevé.

Le jury renouvelle sa principale recommandation qui consiste à s'assurer de bases solides et de faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases.

Admissibilité L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format légèrement différent de celui du concours standard. Le site http://www.agreg.org présente, en plus du sujet du concours 2017, un sujet de test qui avait servi à configurer les attentes de cette épreuve. Le sujet était constitué

- d'une série d'exercices,
- de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

L'en-tête du sujet invitait très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait à une telle répartition de l'effort. Instruit par l'expérience du concours 2017, le jury a décidé de restreindre fortement le nombre d'exercices, qui balayent plutôt le niveau L1-L3, et de ne plus proposer une longue liste « à la carte ». Un tel format « exercices (imposés) + problème au choix » sera reconduit en 2019.

Admission Bien que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours du candidat, le jury travaille de manière étanche : les commissions des épreuves de leçons et de modélisation ne recoivent aucune indication sur le profil des candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Ces épreuves obéissent donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

Le jury veille à respecter le programme. On peut estimer que des résultats « importants » manquent au programme ; les candidats restent libres d'en faire mention et de proposer des excursions hors des limites du programme, mais ces allusions, auxquelles le jury sait bien sûr s'adapter, ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales. Les candidats titulaires d'un doctorat, qui ont souvent mené des recherches très avancées sur des notions qui prolongent les éléments du programme, peuvent être tentés de se placer sur ce terrain qui a été celui de leur thèse. Le jury saura évidemment suivre le candidat, mais il s'attachera surtout à vérifier la maîtrise des bases du programme et la capacité à les exposer clairement et rigoureusement. Un positionnement outrageusement au-delà du programme n'a en général pour conséquence que de provoquer l'irritation du jury. Il est donc totalement inutile, si ce n'est contre-productif, de tenter d'éblouir par des énoncés sophistiqués alors que les bases restent friables.

2.2.2 Données statistiques diverses

Les tableaux de répartition des candidats suivant l'académie, l'âge, le genre et la profession sont donnés aux figures 2.1, 2.2, 2.3, 2.4. Deux candidats se sont présentés à l'épreuve écrite avec une dispense de diplômes, mais aucun n'a pu être déclaré admissible. La majeure partie des admissibles et des admis a moins de 30 ans. Si les candidates représentent 30 % et 24 % respectivement de la population des inscrits et des présents à l'épreuve écrite, elles ne sont plus que 5 % des admissibles (2 candidates sur 37 !). Commenter de manière pertinente la faiblesse de ce taux de réussite réclamerait une analyse statistique plus fine du profil des candidats (corrélation avec l'emploi, l'âge,...). Les procédures de correction des épreuves écrites étant totalement anonymisées, il est difficile d'imaginer quel biais pourrait jouer à ce niveau. Aux épreuves orales, la réussite des femmes est totale (classement 2ème et 9ème) ; elles représentent donc 13 % des admis. Un autre fait remarquable de la session 2018 réside dans la forte présence de candidats ayant une formation initiale d'ingénieur : 11 sur les 37 admissibles et 5 sur 15 admis sont dans ce cas, que les thèses soient anciennes ou récentes.

L'évolution de la physionomie du concours est surtout sensible sur les tableaux 2.1 et 2.2 décrivant la cohorte des candidats admissibles en termes d'ancienneté après thèse et de domaine scientifique du doctorat. On y observe un renforcement particulièrement significatif de la présence de « jeunes » docteurs, dont la thèse est très récente. Ce phénomène n'empêche pas que des titulaires de thèses plus anciennes, manifestement bien préparés eux aussi, franchissent la barre d'admission. On donne, suivant une affectation quelque peu arbitraire, des éléments de répartition des candidats entre grands champs des mathématiques et dans d'autres disciplines. On notera pour cette session d'une part la réussite de candidats issus des sciences informatiques, dont le major du concours, et d'autre part que des candidats venus d'autres disciplines parviennent à être reçus (tous ces candidats ont une moyenne supérieure ou égale à 9,85). Le jury se réjouit de ces signes d'ouverture du concours.

Academies	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	82	31	31	15	15	5
NICE	17	5	5	1	1	
AIX-MARSEILLE	14	5	5	1	1	1
ROUEN	13	3	3	1	1	
GRENOBLE	12	7	7	1	1	1
LILLE	12	7	7	2	2	1
BORDEAUX	11	4	4			
LYON	11	3	3	2	2	2
MONTPELLIER	11	7	7	4	3	2
TOULOUSE	10	3	3	1		
RENNES	9	4	4	2	2	1
POITIERS	9	3	3			
ORLEANS-TOURS	9	6	6			
NANCY-METZ	7	4	4			
CAEN	6	1	1			
DIJON	6	2	2	2		
AMIENS	6	4	4	3	2	1
NANTES	5					
BESANCON	4	1	1			
STRASBOURG	4	3	3			
LA REUNION	4					
GUADELOUPE	4					
CLERMONT-FERRAND	3	2	2	1	1	1
MARTINIQUE	3					
REIMS	2	1	1	1	1	
GUYANE	2	1	1			
LIMOGES	1					
NOUVELLE CALEDONIE	1	1	1			
MAYOTTE	1	1	1			

FIGURE 2.1 – Répartition suivant l'académie d'inscription aux différentes étapes du concours

2018	Ancienneté thèse	0-1 an	1-5 ans	5-7 ans	7-10 ans	plus de 10 ans
	Admissibles	10	13	2	3	5
	Admis	7	5	1	1	1

Section	CNU25	CNU26	CNU27	Autres (physique, mécanique, automatique,...)
Admissibles	6	13	5	9
Admis	4	5	3	3

TABLE 2.1 – Répartition des admissibles (ayant déposé un dossier pour l'oral) 2018 suivant l'ancienneté et la discipline de la thèse

2017	Ancienneté thèse	0-1 an	1-5 ans	5-7 ans	7-10 ans	plus de 10 ans
	Admissibles	0	13	3	5	5
	Admis	0	6	1	1	2

Section	CNU25	CNU26	CNU27	Autres (physique, mécanique, automatique,...)
Admissibles	10	10	3	3
Admis	4	4	0	2

TABLE 2.2 – Répartition des admissibles 2017 suivant l'ancienneté et la discipline de la thèse

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
26	2	1	1			
27	8	7	7	5	4	4
28	15	9	9	4	4	3
29	11	5	5	3	3	
30	18	7	7	4	4	4
31	16	4	4	3	1	1
32	11	4	4	2	2	
33	16	5	5	3	3	1
34	11	5	5	1		
35	11	8	8	1	1	
36	18	5	5	2	2	
37	10	2	2	1	1	
38	4	1	1			
39	8	3	3	1	1	1
40	9	1	1			
41	8	3	3	1	1	
42	10	5	5	2	2	
43	8	1	1			
44	5	1	1			
45	13	3	3	1	1	
46	3					
47	6	4	4	2	1	
48	8	4	4	1	1	1
49	2					
50	11	7	7			
51	7	3	3			
52	5	2	2			
53	6	3	3			
54	2	1	1			
55	3					
56	5	2	2			
57	4					
58	2	1	1			
61	1					
62	1	1	1			
63	1	1	1			

FIGURE 2.2 – Répartition suivant l'âge aux différentes étapes du concours

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
Homme	196	83	83	35	30	13
Femme	83	26	26	2	2	2

FIGURE 2.3 – Répartition suivant le genre aux différentes étapes du concours

Profession	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CERTIFIE	83	39	39	7	5	
SANS EMPLOI	48	16	16	8	8	5
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	21	4	4	1	1	
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	17	2	2	1	1	1
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	17	11	11	3	3	1
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	14	8	8	6	4	3
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	13	6	6	1	1	
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	7					
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	7	5	5	4	4	3
PLP	6					
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	5	4	4			
PROFESSIONS LIBERALES	4	1	1	1	1	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	4	1	1			
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	4	1	1			
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	3	1	1			
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	3					
AGREGE	3	1	1			
MAITRE AUXILIAIRE	3	1	1			
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	3	2	2	1	1	
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	3	1	1	1		
PERS FONCTION PUBLIQUE	2					
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	2	1	1	1	1	1
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	1	1	1			
ASSISTANT D'EDUCATION	1					
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	1					
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	1	1	1	1	1	
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	1	1	1			
PROFESSEUR ECOLES	1					
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	1	1	1	1	1	1

FIGURE 2.4 – Répartition suivant la profession aux différentes étapes du concours

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques

Le sujet est disponible à l'URL http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid111368/sujets-et-rapports-des-j html ou sur le site http://www.agreg.org.

3.1 Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité

3.1.1 Commentaires sur les exercices

À part une « mauvaise foi » sur certains sujets (inégalités remarquables, relations entre les L^p) qui met forcément le correcteur dans une position de doute, les copies étaient rédigées raisonnablement.

Exercice 1

Cet exercice portait sur les polynômes d'endomorphismes, et la réduction des endomorphismes

$$M \longmapsto AM \text{ et } M \longmapsto MB$$

dans $M_n(\mathbf{R})$. Le quartile supérieur correspond à 10/20.

Les deux premières questions ont été bien traitées en général. Cependant le terme constant d'un polynôme semble poser des problèmes lors de l'évaluation en la matrice A. On rappelle donc que $A^0 = Id$. Des complications inutiles font parfois douter de la compréhension des notions.

La troisième question a nettement fait une séparation entre les candidats sur la qualité des justifications données, et fait apparaître des lacunes sur la notion de polynôme minimal d'un endomorphisme.

La dernière question a été abordée par la moitié des copies, sans beaucoup de succès. La vérification que les endomorphismes ϕ_A et ψ_B commutent était attendue pour justifier l'existence d'une base diagonalisant ces deux endomorphismes simultanément. Peu de copies ont traité complètement la question.

Exercice 2

Cet exercice portait sur la continuité de la limite (suite uniformément convergente de fonctions continues, suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ de dérivées dominées uniformément).

Cet exercice a été plutôt réussi dans l'ensemble (la médiane est à 8/20, le quartile supérieur à 12/20). Les difficultés rencontrées par les candidats portaient principalement sur la rédaction et l'articulation correcte des quantificateurs. Une petite (mais non négligeable) fraction des candidats ne connaît pas les définitions.

Exercice 3

Cet exercice portait sur la loi du 0-1 de Borel (« Si les événements A_n sont indépendants, alors $P(\limsup A_n)$ vaut 0 ou 1 suivant que la série de terme général est convergente ou divergente ».) La première question a été bien traitée par les candidats. Pour les questions suivantes, les candidats ont rencontré des difficultés de manipulation des ensembles et des inégalités, et les questions 3 et 4 n'ont été abordées que par une minorité de candidats.

Exercice 4

Cet exercice portait sur les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit dans un triangle non aplati ABC. Le quartile supérieur est à 8/20. Les deux premières questions ont été correctement abordées, avec un dessin à l'appui. La plupart des copies s'arrêtent après l'utilisation du théorème de Thalès dans la question 2.

Un cinquième des copies seulement ont abordé les questions 3 et 4, la notion de coordonnées barycentriques étant peu maîtrisée.

Exercice 5

Cet exercice sur les groupes finis, étudiait le plongement d'un groupe fini G dans le groupe des permutations de l'ensemble G par action de translation (Cayley). En calculant la signature d'un élément, on obtenait une condition nécessaire et suffisante pour que l'image soit contenue dans le groupe alterné. Cet exercice a été peu choisi, 4 copies sur 68, mais en général assez bien traité (médiane : 12,5/20).

Exercice 6

Cet exercice consistait en l'application du théorème des extremas liés, ou en l'utilisation de la concavité de la fonction logarithme. La méthode avec les extrémas liés a été très peu abordée (et le résultat lui-même peu énoncé). La réponse à la dernière question a souvent été assénée sans justification. La médiane est à 3/20, le quartile supérieur à 8/20.

3.1.2 Commentaires sur le problème d'algèbre et géométrie

Le problème d'algèbre et géométrie portait sur un sujet classique : l'action du groupe $Sl_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré noté H, dans l'optique de décrire ce groupe par générateurs et relations.

La partie A introduisait l'action de $Sl_2(\mathbf{R})$ sur H, la métrique associée, et la description du domaine fondamental de Dirichlet D pour l'action du sous-groupe $Sl_2(\mathbf{Z})$. Elle a été abordée par 59 copies, le quartile supérieur correspond à $7,36/20$.

La partie B se concentrait sur la définition et les propriétes du groupe libre engendré par un alphabet. Elle a été abordée par 40 copies, le quartile supérieur correspond à $7,42/20$.

La partie C permettait d'obtenir les relations entre les générateurs de $Sl_2(\mathbf{Z})$ obtenus dans la partie A, en utilisant l'action des éléments sur l'orbite de D. Elle a été abordée par 11 copies, le quartile supérieur correspond à $2,85/20$.

Dans la partie A,

1. la question 1 a été traitée avec succès dans la plupart des cas ;
2. dans la question 2 on attendait du candidat qu'il vérifie non seulement la stabilité de H par la transformation $z \to A \cdot z$, mais aussi la vérification des propriétés des actions de groupe, ce qui n'a été fait que par une petite moitié des candidats ayant abordé la question ;

3. les questions 3 et 4 ont été le plus souvent bien traitées ;
4. la minoration de la question 5 a posé quelques difficultés ;
5. dans la question 8, on attendait une construction d'un chemin allant de z_1 à z_3 en passant par z_2, pour obtenir l'inégalité triangulaire, et la description d'un chemin de z_2 vers z_1, à partir d'un chemin de z_1 vers z_2 pour la symétrie ;
6. les inégalités de la question 11 ont posé un problème, en particulier la première à cause du signe de $\mathrm{Re}(z)cd$.

Pour la partie B,
1. les questions 15, 16, 17 de la partie B ont été en général bien traitées ;
2. la question 18 était plus délicate, en effet la relation d'adjacence n'étant pas transitive, un élément de longueur minimal parmi les adjacents d'un élément x, pouvait ne pas être réduit ;
3. le reste des questions de la partie B a été traité avec plus ou moins de succès par 4 copies.

Pour la partie C, les quatres premières questions ont été abordées avec succès, en partie par grapillage.

3.1.3 Commentaires sur le problème d'analyse et probabilités

Le problème d'analyse portait sur l'espace de Hardy dans le demi-plan complexe. Le but de la partie A était d'établir une formule de représentation pour les fonctions de l'espace de Hardy. Dans la question 2, on se donnait une fonction définie par la formule (1), et on vérifiait qu'elle appartenait à l'espace de Hardy. Dans la question 3, on montrait que, réciproquement, toute fonction de l'espace de Hardy pouvait être représentée par une telle formule. Cette partie faisait appel à des manipulations sur les intégrales à paramètres, à des connaissances sur la transformée de Fourier (identité de Plancherel) et sur les fonctions holomorphes (définition, formule de Cauchy, théorème intégral de Cauchy). La question 1 a été plutôt bien traitée. Dans la question 2, les moyennes aux sous-questions se situent entre 0,67/4 et 1,95/4. Moins de 10 candidats sur 41 ont abordé les questions 3.c à 3.h. Le but de la partie B était d'étudier les comportements des fonctions de l'espace de Hardy près de la frontière $\{y = 0\}$, en établissant une autre formule de représentation (4). Cette partie faisait principalement appel à des théorèmes d'intégration (Fubini, théorèmes de convergence). Elle a été traitée par 16 candidats sur 41 ; la médiane est à 4,5/22, et le quartile supérieur est à 12,5/22. Dans la partie C, on introduisait la transformée de Hardy. Il s'agissait principalement ici de manipuler la transformée de Fourier et d'utiliser les résultats des parties précédentes. Cette partie a été assez peu abordée (10 candidats ont traité au moins une question de cette partie). La partie D étudiait les liens entre transformée de Hardy et mutliplicateurs de Fourier. Cette partie a été plutôt bien traitée.

Il ressort des corrections que :
- de nombreux candidats semblent méconnaître les inégalités remarquables, et majorent par exemple $(a+b)^2$ par a^2+b^2, quitte à se contredire quelques lignes plus loin…
- les relations d'inclusion entre les espaces L^p sur un intervalle borné sont souvent mal maîtrisées. Il ne faut pas hésiter à tester ses assertions sur des exemples en cas de doute (par exemple la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ sur $]0,1[$ avec $\alpha > 0$) ;
- la transformée de Fourier est connue raisonnablement ;
- il manque souvent des réflexes basiques sur la manipulation des fonctions holomorphes (intégration sur un rectangle que l'on fait « tendre vers l'infini »).

3.2 Corrigé détaillé des exercices

Exercice 1

1. L'espace vectoriel E admet une structure de $\mathbf{R}$ algèbre, d'où la bilinéarité de l'application θ de $E \times E$ dans E qui associe au couple (M,N) le produit MN. On en déduit la linéarité des applications ϕ_A et ψ_A. Ces applications sont des endomorphismes de E.

2. L'associativité du produit matriciel permet d'écrire pour tout entier naturel n, $\phi_A^n = \phi_{A^n}$ et $\psi_A^n = \psi_{A^n}$. La bilinéarité de l'application θ permet alors d'obtenir $P(\phi_A) = \phi_{P(A)}$ et $P(\psi_A) = \psi_{P(A)}$.
3. D'après ce qui précède, si π_A est le polynôme minimal de A, $\pi_A(\phi_A) = \phi_{\pi_A(A)}$ donc $\pi_A(\phi_A) = 0_{L(E)}$. Le polynôme minimal π_{ϕ_A} de ϕ_A divise donc π_A. De plus si Id désigne la matrice identité de taille n, $\phi_{\pi_{\phi_A}(A)}(Id) = 0$ puis $\pi_{\phi(A)}(A) = 0$. Le polynôme π_A divise donc π_{ϕ_A}. Les polynômes minimaux de A et ϕ_A sont associés et unitaires, donc égaux. Un raisonnement du même type montre que $\pi_A = \pi_{\psi_A}$.
4. On sait que A et B sont diagonalisables si et seulement si leurs polynômes minimaux sont scindés à racines simples. Donc si A et B sont diagonalisables, ϕ_A et ψ_B, ayant même polynôme mimal, le sont. De plus par associativité du produit matriciel, pour tout M dans E, $A(MB) = (AM)B$, donc les endomorphismes ϕ_A et ψ_B commutent et sont simultanément diagonalisables. Une base diagonalisant $\phi_A$et ψ_B diagonalise aussi $\phi_A - \psi_B$.

   On sait que si B est diagonalisable alors sa transposée aussi (même polynôme minimal). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $(u_1, \dots, u_n)$ une base de vecteurs propres pour A et $(v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres pour la transposée de la matrice B. Si X_i désigne la matrice colonne des coordonnées de u_i dans la base canonique, et Y_j celle associée à v_j, alors par construction, il existe des réels λ_i et β_j tels que $AX_i = \alpha_i X_i$ et ${}^tBY_j = \beta_j Y_j$. Considérons les matrices $F_{i,j} = X_i{}^tY_j$. On obtient n^2 matrices appartenant à E, et vérifiant

$$\phi_A(F_{i,j}) = \alpha_i F_{i,j} \tag{3.1}$$
$$\psi_B(F_{i,j}) = \beta_j F_{i,j} \tag{3.2}$$
$$(\phi_A - \psi_B)(F_{i,j}) = (\alpha_i - \beta_j) F_{i,j}.$$

   On a donc une famille de n^2 vecteurs propres communs aux endomorphismes ϕ_A, ψ_B et $\phi_A - \psi_B$. Il reste à démontrer que cette famille est libre. Supposons que des scalaires $\lambda_{i,j}$ vérifie l'égalité

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} X_i{}^tY_j = 0_E$$

   Comme $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, les formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ définie par les matrices ${}^tY_j$ sont indépendantes. On peut donc considérer la base antéduale $(w_1, \dots, w_n)$ dont les matrices de coordonnées Z_k, associées, vérifient ${}^tY_j Z_k = \delta_{j,k}$ où $\delta_{j,k}$ désigne le symbole de KRONECKER. Alors par multiplication à droite par Z_k on obtient

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,k} X_i = 0$$

   L'indépendance des X_i permet de conclure à la nullité des coefficients $\lambda_{i,k}$.

   La famille $F_{i,j}$ est libre de cardinal n^2, c'est une base de diagonalisation simultanée. De plus chaque matrice $F_{i,j}$ est non nulle, et ses colonnes sont proportionnelles à X_i donc chaque matrice $F_{i,j}$ est de rang 1.

Exercice 2

1. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, $x_0 \in I$. On prend $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$, puis $\delta > 0$ module de continuité de f_{n_0} en x_0 pour ε. On obtient, pour $|x - x_0| \leqslant \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$.
2. Le choix $I = [0, 1]$, $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ et $f = \mathbf{1}_{\{1\}}$ convient.
3. Soit $x, y \in I$ quelconques avec $x \leqslant y$, et $n \in N$ quelconque. On a

$$|f_n(y) - f_n(x)| = \left| \int_x^y f_n'(z)\, dz \right| \leqslant \int_x^y g(z)\, dz.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ avec x et y fixés, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int_x^y g(z)\, dz.$$

Par ailleurs, comme g est localement intégrable sur I, $\lim_{\delta \to 0} \int_{[x_0-\delta, x_0+\delta] \cap I} g(z)dz = 0$ pour tout $x_0 \in I$ (théorème de convergence dominée). On en déduit que f est continue sur I.

Exercice 3

1. Puisque X_n suit une loi exponentielle de paramètre 1, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln n} > a\right) &= \mathbb{P}\left(X_n > a \ln n\right) && (3.3) \\ &= \int_{a \ln n}^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{n^a}. \end{aligned}$$

2. Si $a > 1$, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln n} > a\right) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $P(A_a) = 0$.
Si $0 < a \leqslant 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln n} > 1\right) = +\infty.$$

Comme les évènements $\{\frac{X_n}{\ln n} > 1\}$ sont indépendants, d'après la loi du 0-1 de Borel, on obtient $P(A_a) = 1$.

3. Soit $a > 0$ quelconque. Définissons la variable aléatoire $\delta = \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{\ln n} - a$. Alors

$$\begin{aligned} \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} > a\right\} &= \{\delta > 0\} && (3.4) \\ &\subset \left\{\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \sup_{k \geqslant n} \frac{X_k}{\ln k} \geqslant a + \frac{\delta}{2}\right\} && (3.5) \\ &\subset \left\{\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \exists k \geqslant n,\ \frac{X_k}{\ln k} \geqslant a + \frac{\delta}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} > a\right\} \subset \bigcap_{n \geqslant 2} \bigcup_{k \geqslant n} \left\{\frac{X_k}{\ln k} > a\right\} = A_a.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} A_a &\subset \bigcap_{n \geqslant 2} \bigcup_{k \geqslant n} \left\{\frac{X_k}{\ln k} \geqslant a\right\} && (3.6) \\ &\subset \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \geqslant a\right\}. \end{aligned}$$

4. Soit $a > 1$ quelconque. D'après l'inclusion ci-dessus, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leqslant a \quad \text{presque sûrement.}$$

Donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbf{N}^*}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leqslant 1+\frac{1}{N}\right\}\right)=1,$$
et par conséquent,
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leqslant 1\quad\text{presque sûrement.}$$
Par ailleurs, en choisissant $a=1$ dans les deux questions précédentes, on obtient également
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}\geqslant 1\quad\text{presque sûrement.}$$
En conclusion,
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\ln n}=1\quad\text{presque sûrement.}$$

Exercice 4

1. Soit D la droite passant par B et parallèle à (AC). Supposons D parallèle à Δ_A, alors par transitivité Δ_A est parallèle à (AC). Ces droites Δ_A et (AC) ayant un point commun A sont confondues. Alors $(AB)=(AC)$ et le triange est aplati. On obtient une contradiction. Les droites D et Δ_A sont donc concourantes en un point A_1.
2. On applique le théorème de Thalès pour les droites Δ_A et (CB) et les parallèles (AC) et $(BA_1)=D$. Cela donne
$$\frac{I_AB}{I_AC}=\frac{I_AA_1}{I_AA}=\frac{A_1B}{AC}$$
La droite Δ_A étant la bissectrice de $\widehat{BAC}$, le triangle (ABA_1) a deux angles égaux
$$\widehat{A_1AB}=\widehat{CAA_1}=\widehat{BA_1A}.$$
D'où $c=A_1B$ et l'égalité des quantités $\frac{I_AB}{I_AC}$, $\frac{A_1B}{AC}$ et $\frac{c}{b}$.
3. Puisque I_A appartient au segment BC, la relation métrique précedent se traduit par
$$b\vec{I_AB}+c\vec{I_AC}=\vec{O}$$
Les coordonnées barycentriques normalisées de I_A dans (A,B,C) sont donc $(0,\frac{b}{b+c},\frac{c}{b+c})$.
4. Soit I le point de coordonnées barycentriques $(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c})$. Par associativité du barycentre, I est barycentre de A et I_A affectés des coefficients $\frac{a}{a+b+c}$ et $\frac{b+c}{a+b+c}$. En particulier I se trouve sur la bissectrice Δ_A. Le même raisonnement sur les autres bissectrices intérieures conduit au fait que I est dans l'intersection de ces bissectrices. C'est le point de concours des bissectrices intérieures, ou encore le centre du cercle inscrit au triangle ABC

Exercice 5

1. L'orbite d'un élément h de G pour l'action de $\langle g\rangle$ est $\langle g\rangle h$. C'est un ensemble de cardinal l'ordre de g, noté $o(g)$. Il y a sous l'action de $\langle g\rangle$ sur G, $[G:\langle g\rangle]$ orbites.

   La décomposition de $\phi(g)$ en produit de cycles de supports deux à deux disjoints est donc formée de $[G:\langle g\rangle]$ $o(g)$-cycles de la forme $(h\,gh\,\ldots\,g^{o(g)-1}h)$ dès que $o(g)>1$. La signature de $\phi(g)$ est donc
$$\epsilon(\phi(g))=(-1)^{(o(g)-1)[G:\langle g\rangle]}.$$

2. L'élément $\phi(g)$ n'est pas dans le groupe alterné si et seulement si $o(g)$ est pair et $[G : \langle g \rangle]$ impair.
   Si G est d'ordre impair, $\phi(G)$ est toujours contenu dans le groupe alterné.
   Si G est d'ordre $2^k m$ avec $k > 0$ et m impair, les éléments g vérifiant $\epsilon(\phi(g)) = -1$ engendrent un groupe d'ordre pair et d'indice impair, donc contenant un 2-Sylow. Ce 2-Sylow est alors cyclique (donc tous les 2-Sylow par conjugaison). Réciproquement si un 2-Sylow de G est cyclique, tout générateur g de ce 2-Sylow conduit à un élément $\phi(g)$ de signature impaire. On en conclut que $\phi(G)$ est contenu dans le groupe alterné de $\mathfrak{S}_G$ si et seulement si les 2-Sylow lorsqu'ils existent ne sont pas cycliques.
3. Si G admet un 2-Sylow cyclique, alors $\epsilon \circ \phi$ est un homomorphisme non trivial de G dans $\{\pm 1\}$, son noyau H est un sous-groupe normal d'indice 2, de G. Comme $|G| > 2$ H est un sous-groupe normal non trivial de G, et G n'est pas simple.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 1$. Soit des nombres réels strictement positifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}_+)^n & \to & \mathbf{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \end{array}$$

On note

$$C = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1 \right\}.$$

1. La fonction f est continue sur $(\mathbf{R}_+)^n$ comme produit de fonctions continues. Par ailleurs, l'ensemble C est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, donc C est fermé. De plus, C est clairement borné puisque pour tout $(x_1, \cdots x_n) \in C$, on a $0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i^{-1}$ pour tout i. Donc C est un compact de $\mathbf{R}$, et f est bornée et atteint ses bornes sur C : il existe $a \in C$ tel que $f(a) = \sup_{x \in C} f(x)$.

   Par ailleurs, $\sup_{x \in C} f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{n\alpha_1}, \cdots \frac{1}{n\alpha_n}\right) > 0$, et on observe que s'il existe $i \in \{1, \cdots n\}$ tel que $x_i = 0$, alors $f(x) = 0$. Donc la borne supérieure est atteinte sur l'ensemble $(]0, +\infty[)^n$, qui est ouvert. Autrement dit,

$$\sup_{x \in C} f(x) = \sup \left\{ x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ / \ x \in (]0, +\infty[)^n, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - 1 = 0 \right\}.$$

   Les applications f et $g : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - 1$ sont toutes deux différentiables sur l'ouvert $(]0, +\infty[)^n$. De plus, pour tout $y \in \mathbf{R}$, dg_y est la forme linéaire

$$dg_y : x \in \mathbf{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

   Comme $(\alpha_1, \cdots \alpha_n) \neq 0$, la forme différentielle dg_y est surjective pour tout $y \in \mathbf{R}^n$. D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, pour tout $a \in C$ tel que $f(a) = \sup_{x \in C} f(x)$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a),$$

   c'est-à-dire, pour tout $i \in \{1, \cdots n\}$

$$\alpha_i \frac{f(a)}{a_i} = \lambda \alpha_i.$$

   On en déduit que

$$a_1 = \cdots = a_n = \frac{f(a)}{\lambda}.$$

Comme $a \in C$ et que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on obtient $a_1 = \cdots = a_n = 1$.
Donc f atteint sa borne supérieure en un unique point de C : le point $(1, \cdots, 1)$. En particulier, $\sup_{x \in C} f(x) = 1$.

2. Soit $x \in (\mathbf{R}_+)^n$ quelconque. On distingue deux cas :
 — Premier cas : $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
 Dans ce cas l'inégalité
$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$
 est trivialement vérifiée (et c'est même une égalité).
 — Deuxième cas : $(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.
 Dans ce cas, $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j > 0$, et on peut définir $\tilde{x} \in (\mathbf{R}_+)^n$ par
$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j}.$$
 On observe que $\tilde{x} \in C$. D'après la question précédente,
$$f(\tilde{x}) = \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}} \leqslant 1. \tag{3.7}$$
 En utilisant l'égalité $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, on obtient l'inégalité désirée.
3. En utilisant les notations de la réponse précédente et la question 1, on a égalité si et seulement si ($x = 0$ ou $\tilde{x} = (1, \cdots, 1)$), c'est-à-dire si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

3.3 Corrigé détaillé du problème d'algèbre et géométrie

Partie A : $Sl_2(\mathbf{Z})$ et le demi-plan de Poincaré

1. On remarque que l'intersection de deux ensembles distincts de la forme $C_{a,b}$ ou D_c contient au plus un élément de H. D'où l'unicité de la partie recherchée, si elle existe.
 Si les parties réelles de z_1 et z_2 sont toutes deux égales à a, la partie D_a contient $\{z_1, z_2\}$.
 Si les parties réelles de z_1 et z_2 sont distinctes la médiatrice du segment $[z_1, z_2]$ n'est pas parallèle à l'axe réel, et le coupe en un point $(\alpha, 0)$, centre de l'unique cercle centré sur l'axe réel, passant par z_1 et z_2. Ce cercle a pour rayon R vérifiant
$$R^2 = (\alpha - x_1)^2 + y_1^2 = (\alpha - x_2)^2 + y_2^2$$
 Le demi-cercle $C_{a,b}$ passe par z_1 et z_2 si et seulement si $a = \alpha - R$ et $b = \alpha + R$.
2. On obtient
$$A \cdot z = \frac{ac|z|^2 + (ab + bc)\mathrm{Re}(z) + (ad - bc)\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$
 Donc si $\det A = 1$, la partie imaginaire de $A \cdot z$, $\frac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2}$, est du même signe que celle de z. Le demi-plan H est donc stable par la transformation $z \mapsto A \cdot z$.
 Il reste à vérifier qu'il s'agit d'une action de groupe c'est à dire que pour A et B dans $Sl_2(\mathbf{R})$, et z dans H, $(AB) \cdot z = A \cdot (B \cdot z)$, et $I \cdot z = z$. La dernière égalité est immédiate, pour la première

on écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$
$$(AB) \cdot z = \frac{ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + cf + dh}$$
$$A \cdot (B \cdot z) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d}$$
$$= \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + cf + dh}.$$

3. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit comme la translation horizontale $z \mapsto z - a$, l'image de D_a est donc D_0. L'homographie $z \rightarrow \frac{z-a}{(a-b)(z-b)}$ laisse stable la droite réelle, et le cercle de centre d'affixe $\frac{a+b}{2}$ passant par a et b contient aussi $\frac{a+b}{2} + i\frac{b-a}{2}$ et à pour image par cette transformation, la droite (b est le pôle de l'homographie) passant par 0 et $\frac{2i}{b-a}$ soit l'axe imaginaire pur. Par connexité $C_{a,b}$ est envoyé sur la composante connexe de l'axe imaginaire privé de 0, contenue dans H. On peut obtenir aussi le résultat par calcul direct

$$A \cdot (\frac{a+b}{2} + e^{it}\frac{b-a}{2}) = \frac{i\cos\frac{t}{2}}{(b-a)\sin\frac{t}{2}}.$$

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$, l'image cherchée est D_0.

4. On a

$$L(\gamma_{a,b}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(a-b)^2}}{(a-b)t + b} dt \tag{3.8}$$
$$= -[\ln((a-b)t + b)]_0^1 \tag{3.9}$$
$$= \ln(\frac{b}{a}). \tag{3.10}$$

5. On a pour tout chemin γ joignant ia à ib dans H,

$$L(\gamma) \geqslant \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \tag{3.11}$$
$$\geqslant \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \tag{3.12}$$
$$\geqslant \ln(\frac{b}{a}) \tag{3.13}$$
$$\geqslant L(\gamma_{a,b}).$$

De plus γ étant C^1 par morceaux, pour que l' égalité se produise il faut que pour tout t dans $[0,1]$, $x'(t) = 0$ donc que l'image du chemin soit dans D_0.

6. Si $z_1 = ia$ et $z_2 = ib$, d'après la définition de d et les deux questions précédentes la borne inférieure des $L(\gamma)$ est obtenue pour $\gamma_{a,b}$ et $d(z_1, z_2) = \ln(\frac{b}{a})$.

7. D'après la question 3, la partie Δ_{z_1,z_0} définie en question 1 est de la forme D_a où $C_{a,b}$. D'après la question 2, si elle est de la forme D_a, on peut choisir g comme la classe de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspondant à la transformation $z \rightarrow z - a$, si elle est de la forme $C_{a,b}$, il suffit de prendre

pour g la classe de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & \frac{-a}{a-b} \\ 1 & -b \end{pmatrix}$ qui correspond à la transformation $z \to \frac{z-a}{(a-b)(z-b)}$. élément g de $Sl_2(\mathbf{R})$ vérifiant $g \cdot \Delta_{z_1,z_2} = D_0$.

8. Montrons que les éléments de $Sl_2(\mathbf{R})$ agissent comme des isométries. Soit γ un chemin de z_1 à z_2 dans H, et g un élément de $Sl_2(\mathbf{R})$, et $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $Sl_2(\mathbf{R})$. L'application $g \circ \gamma$ bien C^1 par morceaux, à valeurs dans H et joint $g \cdot z_1$ à $g \cdot z_2$. De plus on a

$$L(g \cdot \gamma) = \int_0^1 \frac{\frac{|\gamma'(t)|}{c\gamma(t)+d)^2}}{\frac{\gamma(t)}{c\gamma(t)+d}} dt \tag{3.14}$$
$$= L(\gamma). \tag{3.15}$$

Puisque g est inversible, lorsque γ parcourt les chemins de z_1 à z_2 dans H, $g \circ \gamma$ parcourt les chemins de $g \cdot z_1$ à $g \cdot z_2$, d'où l'égalité $d(g \cdot z_1, g \cdot z_2) = d(z_1, z_2)$. On en déduit $d(z_1, z_2) = \ln(\frac{a}{b})$ où $g \cdot z_1 = ia$, $g \cdot z_2 = ib$ et $a < b$. Le chemin $g^{-1}.\gamma_{a,b}$ réalise le minimum de distance.

9. Soit γ un chemin de z_1 à z_2 dans H, on note $\gamma^\star$ le chemin de z_2 vers z_1 dans H défini par $\gamma^\star(t) = \gamma(1-t)$. Par le changement de variable $t \to 1-t$ dans l'intégrale on obtient l'égalité $L(\gamma^\star) = L(\gamma)$. On a donc $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$. Par construction l'application d est à valeur positive ou nulle. D'après la question précédente la valeur $d(z_1, z_2)$ est atteinte pour un chemin particulier, et est non nulle si $z_1 \neq z_2$.
Soit γ_1 un chemin de z_1 à z_2 et γ_2 un chemin de z_2 à z_3, on pose

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) \text{ si } & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) \text{ si } & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Alors γ est un chemin dans H joignant z_1 à z_3 et

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x_1'(2t)^2 + y_1'(2t)^2}}{y_1(2t)} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{x_2'(2t-1)^2 + y_2'(2t-1)^2}}{y_2(2t-1)} dt.$$

Par les changements de variables $u = 2t$ dans la première intégrale et $v = 2t-1$ on obtient :

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

D'où

$$d(z_1, z_3) \leqslant L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

Par passage à la borne inférieure lorsque γ_1 et γ_2 parcourent les chemins de z_1 à z_2 et z_2 à z_3, on obtient :

$$d(z_1, z_3) \leqslant d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3).$$

L'application d est donc une distance sur H.

10. Si un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $Sl_2(\mathbf{Z})$ opère trivialement alors

$$\forall z \in H,\ (az+b) = z(cz+d).$$

La fonction polynôme en z, $cz^2 + (d-a)z - b$ s'annule sur l'ensemble infini H donc est identiquement nulle. On obtient donc les égalités $a = d$, $c = 0$, $b = 0$ et $ad - bc = 1$. Soit encore $a = \pm 1$, $d = a$, $c = 0$ et $b = 0$. Le noyau de l'action de $Sl_2(\mathbf{Z})$ est donc $\langle \pm Id \rangle$. Par passage au quotient par le noyau de l'action, le groupe G opère fidèlement sur H.

11. Soit z dans D, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $Sl_2(\mathbf{Z})$

$$(cz+d)\overline{(cz+d)} = c^2|z|^2 + d^2 + 2\mathrm{Re}(z)cd.$$

Comme $|z| \geqslant 1$ et $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2}$ on obtient

$$|cz+d|^2 = c^2|z|^2 + d^2 + 2\mathrm{Re}(z)cd \geqslant (|c|-|d|)^2 + |cd|.$$

Les entiers a, b, c, et d sont liés par la relation $ad-bc=1$, on ne peut donc pas avoir simultanément c et d nuls. Donc si $|c| = |d|$ alors $|dc| \geqslant 1$, sinon $(|c|-|d|)^2 \geqslant 1$. La quantité $(|c|-|d|)^2 + |cd|$ est somme de deux entiers positifs, dont l'un au moins est non nul, d'où

$$(|c|-|d|)^2 + |cd| \geqslant 1.$$

12. Par stabilité de H sous l'action de G, pour tout z dans H, $G \cdot z$ est dans H Soit $z = x+iy$. Si n est un entier vérifiant $|x-n| \leqslant \frac{1}{2}$, alors $z' = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$ est dans l'orbite de z ainsi que $-\frac{1}{z'}$. De plus z' ou $-\frac{1}{z'}$ est dans D. On peut donc se ramener au cas $z \in D$.

   La partie imaginaire de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z$ étant $\frac{y}{(cz+d)^2}$, d'après la question précédente on a $|cz+d|^2 \geqslant 1$ donc z est de partie imaginaire maximale dans son orbite. De plus pour tout entier n, l'ensemble des couples d'entiers vérifiants $|cz+d| < N$ est fini, donc les ouverts $\{z' \in H, \mathrm{Im}(z') > y\frac{1}{N^2}\}$ contiennent qu'un nombre fini d'éléments de $G \cdot z$, et leur réunion est H. L'orbite $G \cdot z$ est donc une partie discrète de H.

13. Soit z dans $\mathring{D}$ et g dans G tels que $g \cdot z$ soit dans $\mathring{D}$. Quitte à échanger z et z', et g en g^{-1}, on peut supposer $\mathrm{Im}(gz) \geqslant \mathrm{Im}(z)$. Donc $|cz+d| \leqslant 1$. On obtient donc

$$c^2|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z)cd + d^2 = (|c|-|d|)^2 + |cd| = 1$$

   Sachant que $|z| > 1$, on ne peut pas avoir $d = 0$. Si $c = 0$ alors $d = \pm 1$, $z' = z + b$. Cela n'est possible dans $\mathring{D}$ que pour $b = 0$ (on regarde les parties réelles). Alors $g = \mathbb{1}$. Si $c \neq 0$ alors $|c| = |d| = 1$ et l'égalité ne peut avoir lieue que pour $|z| = 1$ et $|\mathrm{Re}(z)| = \frac{1}{2}$, un tel point n'est pas dans $\mathring{D}$. On obtient donc

$$\forall g \in G, g \neq \mathbb{1} \Rightarrow g \cdot \mathring{D} \cap \mathring{D} = \varnothing.$$

14. Pour tout z dans H, on peut en utilisant une translation par un entier convenable, et la transformation $z \to -\frac{1}{z}$, se ramener à un élément de D.

   Or $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^n$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$. Donc pour tout z dans H il existe g dans G' tel que $g \cdot z \in D$. D'où $H = \bigcup_{g \in G'} g \cdot D$.

   Soient $z_0 = 2i$ dans $\mathring{D}$, et g un élément de G, il existe un élément g' de G' tel que $g \cdot z_0 \in g' \cdot D$, soit $g'^{-1}g \cdot z_0 \in D$. Comme z_0 est dans $\mathring{D}$ et que l'action d'un élément de G est bicontinue, $g'^{-1}g \cdot z_0$ est dans $g'^{-1}g \cdot \mathring{(D)}$. Finalement d'après la question précédente $g = g'$ et G est donc contenu dans G'. L'inclusion $G' \subset G$ étant vérifiée par définition de G', on a l'égalité. Comme $-Id = S^2$, le groupe $\langle S, T \rangle$ contient le noyau de la surjection de $Sl_2(\mathbf{Z})$ sur G, et a pour image $G' = G$, c'est $Sl_2(\mathbf{Z})$.

Partie B : Groupe libre sur un alphabet

15. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on a $x1 = 1x = (x_1, \ldots, x_n)$, si $x = 1$, alors $()() = ()$ donc $11 = 1$. L'élément 1 est donc bien un élément neutre.

Si $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_p)$ et $z=(z_1,\dots,z_q)$, alors

$$\begin{aligned} xy &= (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p)\\ (xy)z &= (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p,z_1,\dots,z_q). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} yz &= (y_1,\dots,y_p,z_1,\dots,z_q)\\ x(yz) &= (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p,z_1,\dots,z_q). \end{aligned}$$

Dans le cas où l'un des éléments x, y ou z est égal à 1 l'associativité est triviale. La propriété $\ell(xy)=\ell(x)+\ell(y)$ traduit que la concaténation de deux uplets donne un uplet de longueur la somme des deux.

16. On suppose $xy=xz$. Alors $\ell(xy)=\ell(xz)$, puis $\ell(y)=\ell(z)$.
Si $\ell(xy)=0$, les mots x, y et z sont tous égaux au mot vide 1.
Supposons maintenant $\ell(xy)>0$. Si $x=1$ alors d'après ce qui précède $xy=y$ et $xz=z$ donc $y=z$. Si $x\neq 1$ et $\ell(y)\neq 0$, cela découle de la condition d'égalité de deux n-uplets : $(x_1,\dots,x_n)=(x'_1,\dots,x'_n)$ si et seulement si pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, $x'_i=x_i$. Si $y=1$ alors $\ell(z)=0$ donc $z=1$. La deuxième propriété se traite de la même manière.

17. (a) Par construction la relation d'adjacence $\mathcal{A}$ est réflexive (on prend $u=x$, $v=1$ et a quelconque dans X). La relation $\mathcal{R}$ est donc elle aussi réflexive. La relation $\mathcal{A}$ est aussi clairement symétrique, ainsi que $\mathcal{R}$. La transitivité provient du fait que $x\mathcal{A}x_1,\dots,x_n\mathcal{A}y$ et $y\mathcal{A}y_1$,..., $y_p\mathcal{A}z$ donne une manière de relier x à z. La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence sur $M(X)$.
   (b) Il faut montrer que si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$ alors $xy\mathcal{R}x'y'$. On remarque d'abord que si $x\mathcal{A}z$ alors $xy\mathcal{A}zy$, en remplaçant v par vy. Ainsi le chemin $x\mathcal{A}x_1\dots x_k\mathcal{A}x'$ donne un chemin $xy\mathcal{A}x_1y\dots x_ky\mathcal{A}x'y$. On a aussi $y\mathcal{A}z$ donne $x'y\mathcal{A}x'z$. On construit ainsi un chemin de xy à $x'y$ puis de $x'y$ a $x'y'$ d'où le résultat.
   On peut donc définir le produit $s(x).s(y)=s(xy)$.
   (c) L'associativité du produit des classes provient de celle du produit dans $M(X)$ par passage au quotient. On remarque que pour tout élément a de X, $aa^\star\mathcal{R}1$ et $a^\star a\mathcal{R}1$, d'où $s(a).(a^\star)=s(a^\star).s(a)=s(1)$, et $s(a)$ est inversible d'inverse $s(a^\star)$. On a de même
   $$x_1\dots x_nx_n^\star\dots x_1^\star\mathcal{R}1,$$
   donc la loi de composition est une loi de groupe d'élément neutre $s(1)$, l'inverse de $s(x_1\dots x_n)$ étant $s(x_n^\star\dots x_1^\star)$. De plus $s(x_1\dots x_n)=s(x_1)\dots s(x_n)$. Le sous-groupe engendré par $s(X)$ contient $s(X^\star)$, donc $M(X)/\mathcal{R}$ tout entier.

18. On raisonne alors par récurrence sur n, en montrant que r est bien définie sur $\bigcap_{0\leqslant i\leqslant n}M_i(X)$, à valeurs dans $F(X)$ et vérifie $\ell(rx)\leqslant\ell(x)$ et $s(r(x))=s(x)$.
   — Un mot de longueur 1 ne peut pas être adjacent au mot vide, car dans l'ensemble $\{uv, uaa^\star v, ua^\star av\}$ il y a deux mots sur 3 de longueur au moins 2. Donc r est définie sur $M_0(X)$ et $M_1(X)$, à valeurs dans $F(X)$.
   -
   — Supposons l'hypothèse vérifiée pour $n\geqslant 1$ et soit $u=u_1\dots u_nu_{n+1}$. Alors $r(u_1\dots u_n)$ est défini et à valeurs dans $F(X)$. Si $r(u_1\dots u_n)=1$ alors $r(u_1\dots u_nu_{n+1})=u_{n+1}$ est bien réduit et de longueur inférieure ou égale à $n+1$. Sinon $r(u_1\dots u_n)=t_1\dots t_k$, avec $k\leqslant n$. Il y a 3 cas a examiner :
     (a) $t_k\neq u_{n+1}^\star$, alors $r(u_1\dots u_{n+1})=t_1\dots t_ku_{n+1}$,
     (b) $k=1$ et $t_1=u_{n+1}^\star$ alors $r(u_1\dots u_{n+1})=1$
     (c) $k\geqslant 2$ et $t_k=u_{n+1}^\star$ alors $r(u_1\dots u_{n+1})=t_1\dots t_k$

Donc r est bien définie sur $\bigcup_{0\leqslant i\leqslant n+1} M_i(X)$. L'égalité $s(r(ua)) = s(ua)$ se vérifie sans difficulté pour chaque cas, en utilisant la propriété $s(x).s(y) = s(xy)$. De plus $r(u_1 \dots u_{n+1})$ ne peut pas s'écrire sous la forme $uaa^\star v$ ou $ua^\star av$ pour a dans X, dans chacun des cas possible du fait que $t_1 \dots t_k$ est déjà réduit.

Cette discussion démontre le résultat demandé

19. L'algorithme de calcul de $r(x)$ donne immédiatement $r(xy) = r(r(x)y)$, or $r(uaa^\star) = r(u)$ donc r est constante sur $\{uv, uaa^\star v, ua^\star av\}$, puis $r(x) = r(y)$ dès que x et y sont adjacents. En considérant un chemin de x à y par des éléments adjacents on obtient que r est constante sur la classe d'équivalence d'un élément x de $M(X)$ pour la relation $\mathcal{R}$. En particulier $\ell(r(x))$ est minimal sur $s(x)$.

    Pour montrer l'unicité, on remarque que la fonction ℓ étant à valeur dans $\mathbf{N}$, il existe dans chaque classe $s(x)$ un élément de longueur minimale x'. Les éléments adjacents étant dans la même classe, x' est donc réduit. Si $x' = t_1 \dots t_k$ est réduit, le calcul direct donne $r(x') = t_1 \dots t_k$ donc $r(x') = x'$. Le fait que r est constante sur les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$ donne que x' est le seul élément réduit de la classe. On a $x' = \overline{r}(s(x))$.

20. On a donc $s_{|F(x)} \circ \overline{r} = Id_{M(X)/\mathcal{R}}$ et $\overline{r} \circ s_{|F(X)} = Id_{F(X)}$. Donc $s_{|F(X)}$ est donc bijective d'application réciproque $\overline{r}$.

    Poser $r(x).r(y) = s^{-1}_{|F(X)}(s(xy))$ à un sens et définit donc bien une loi de composition sur $F(X)$. Par construction de la loi de composition sur $F(X)$,(transport de structure), $s_{|F(X)}$ est une bijection vérifiant

    $$\forall x, y \in F(X), s_{|F(X)}(r(x).r(y)) = s_{|F(X)}(r(xy)).$$

    Comme $M(X)/\mathcal{R}$ est un groupe. On obtient donc une structure de groupe $F(X)$ par transport de structure, à partir de celle de $M(X)/\mathcal{R}$, et $s_{|F(X)}$ devient alors un isomorphisme de groupe entre $F(X)$ et $M(X)/\mathcal{R}$, d'isomorphisme réciproque $\overline{r}$. Pour cette structure $r(x)^{-1} = s^{-1}_{|F(X)}(s(x)^{-1}) = \overline{r}(s(x)^{-1})$.

21. On remarque d'abord que X est contenu dans $F(X)$ et engendre $F(X)$. Si f est une application de X dans un groupe G, elle se prolonge naturellement à $M(X)$ en posant $f(1) = e_G$ et pour tout a dans X $f(a^\star) = f(a)^{-1}$ puis pour $x_1 \dots x_n$ dans $M(X)$, $f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$. Si u et v sont dans $M(X)$ pour tout a dans X, $f(uv) = f(uaa^\star v) = f(ua^\star av)$ donc si x et y sont adjacents alors $f(x) = f(y)$ puis f est constant sur la classe d'équivalence $s(x)$, et définit un morphisme de groupe $\overline{f}$ de $M(X)/\mathcal{R}$ sur G. L'application $\overline{f} \circ s_{|F(X)}$ est l'homomorphisme recherché. Il est unique car déterminé par l'image de X qui engendre $F(X)$.

22. Si G est un groupe et X une partie génératrice de G, l'injection ι de X dans G définit un unique homomorphisme $\widetilde{\iota}$ de $F(X)$ dans G. Comme X engendre G et que pour tout x dans X, $x = \widetilde{\iota}(x)$, $\widetilde{\iota}$ est surjectif.

23. Si X contient au moins deux éléments a et b distincts, alors les mots a, ab, $aba^\star$ et $aba^\star b^\star$ sont réduits. En particulier $\ell(r(aba^\star b^\star)) = 4$ donc $r(a).r(b).r(a)^{-1}.r(b)^{-1} \neq 1$. Le groupe $F(X)$ n'est pas commutatif.

Partie C : Présentation d'un groupe par générateurs et relations

24. L'ensemble $S = \bigcup_{g\in F(X)} gRg^{-1}$ est une partie de $F(X)$, stable par conjugaison. Si K est un sous-groupe de $F(X)$ contenant S alors pour tout g dans $F(X)$, gKg^{-1} contient S. Donc l'intersection $H(R)$ des sous-groupes de $F(X)$ contenant S est un sous-groupe de $F(X)$ contenant S. Il vérifie donc

    $$\forall g \in F(X), H(R) \subset gH(R)g^{-1}.$$

    On en déduit en conjuguant par g^{-1}, les inclusions inverses, puis

    $$\forall g \in F(X), H(R) = gH(R)g^{-1}.$$

De plus si K est un sous-groupe distingué de $F(X)$ contenant R alors $F(X)$ contient chaque conjugué gRg^{-1} de R donc S. L'ensemble des sous-groupes distingués de $F(X)$ contenant R est donc contenu dans l'ensemble des sous-groupes de $F(X)$ contenant S. Comme $H(R)$ est lui-même sous-groupe distingué de $F(X)$, c'est l'intersection des sous-groupes distingués de $F(X)$ contenant S.

25. Si $X = \{a\}$, on note $a^0 = 1$, $a^{\star 0} = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $a^n = \underbrace{a \dots a}_{n}$ et $a^{\star n} = \underbrace{a^\star \dots a^\star}_{n}$. Les éléments de $F(X)$ sont $\{1, a^n, a^{\star n}, n \in \mathbf{N}\}$. L'homomorphisme de $F(X)$ dans $\mathbf{Z}$ défini par $f(a) = 1$ est un isomorphisme. Si $n > 0$ l'image réciproque de $n\mathbf{Z}$ par f est $\{\{a^{nk}, a^{\star nk}, k \in \mathbf{Z}\}$, d'où la présentation de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $\langle \{a\} | \{a^n\} \rangle$.

26. On considère le groupe diédral d'ordre $2n$ qui s'interprète comme le groupe D_{2n} des isométries du polygone régulier à n côtés. Si $X = \{a, b\}$ on considère l'application de X dans D_{2n} telle que $\phi(a)$ soit la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, $\phi(a)(z) = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\phi(b)$ la symétrie $\phi(b)(z) = \overline{z}$. L'application ϕ se prolonge en un homomorphisme surjectif de $F(X)$ sur D_{2n} dont le noyau contient a^n, b^2 et $abab$. Si $R = \{a^n, b^2, abab\}$, les classes de a et b modulo $H(R)$ vérifient $\overline{a} = 1$, $\overline{b}^{-1}$ et $\overline{b}\overline{a}\overline{b}^{-}1 = \overline{a}^{-}1$. Le sous-groupe $\langle \overline{a} \rangle$ est donc un sous-groupe distingué de $F(X)/H(R)$, et les classes modulo ce sous-groupe sont engendrées par la classe de $\overline{b}$ qui est d'ordre divisant 2. L'ordre du groupe $F(X)/H(R)$ est donc majoré par $2n$, et comme ce groupe se surjecte sur D_{2n}, on obtient un isomorphisme. Finalement $\langle a, b | \{a^n, b^2, abab\} \rangle$ est une présentation de D_{2n}.

27. $\phi(\sigma^\star) = \phi(\sigma)^{-1} = s$, $\phi(\sigma^2) = s^2 = \mathbb{1}$ et $\phi(\sigma\tau)^3 = (st)^3 = Id$, car $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(ST)^3 = -Id$ d'où $(st)^3 = \mathbb{1}$.

28. Si $n \leqslant 2$, alors $n = 0$ et $x_1 = 1$, ou $n = 2$ et $\phi(x_1 x_2) = \mathbb{1}$ donne $\phi(x_2) = \phi(x_1)^{-1}$. On en déduit $x_1 x_2 \in \{\tau\tau^\star, \tau^\star\tau, \sigma\sigma, \sigma\sigma^\star, \sigma^\star\sigma, \sigma^\star\sigma^\star\}$. Les z_2 sont tous égaux à z_0, et $t \cdot z_0 = 1+2i$,$t^{-1} \cdot z_0 = -1+2i$, $s \cdot z_0 = s^{-1} \cdot z_0 = \frac{i}{2}$.

29. Si $z_i = z_j$ avec $i < j$ alors $\phi(x_0 \dots x_i) \cdot z_0 = \phi(x_0 \dots x_i) \cdot (\phi(x_{i+1} \dots x_j) \cdot z_0)$. Comme l'action de G est fidèle $z_0 = \phi(x_{i+1} \dots x_j) \cdot z_0$ puis $\phi(x_{i+1} \dots x_j) = \mathbb{1}$ et $\phi(x_1 \dots x_i) = \mathbb{1}$. Les longueurs de ces deux mots sont strictement inférieures à n. On suppose dans la suite que l'ensemble des mots réduits appartenant au noyau de ϕ sans appartenir à $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\})$ est non vide, il existe alors un élément de longueur minimal $x = x_1 \dots x_n$ appartenant à $\ker\phi - H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\})$. Pour un tel mot les z_i sont donc deux à deux distincts.

30. Le segment de géodésique $[z_i, z_{i+1}]$ est l'image par l'action continue de $\phi(x_1 \dots x_{n-1})$ du segment de géodésique $[z_0, \phi(x_n) \cdot z_0]$. Chaque segment de géodésique $[z_0, s \cdot z_0]$, $[z_0, t \cdot z_0]$ et $[z_0, t^{-1} \cdot z_0]$ ne rencontre que deux orbites de D sous l'action de G, donc leur image par l'action d'un élément de G aussi.

31. On sait que $\sigma \cdot \sigma^* = ()$ dans $F(X)$ et que $s^2 = \mathbb{1}$ donc $\phi(\sigma^\star) = \phi(\sigma)$. On peut donc remplacer σ^* par σ dans l'écriture de x. De plus $\ker\phi$ et $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\})$ étant stables par conjugaison, toute permutation circulaire des x_i vérifie

$$x_{i+1} \cdots x_n x_1 \cdots x_i = (x_1 \cdots x_i)^{-1} x_1 \cdots x_n (x_1 \cdots x_i),$$

donc les mêmes hypothèse que x. Si $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \{\tau, \tau^\star\}$ alors x est dans le groupe engendré par τ, et puisque t est d'ordre infini, $\ker\phi \cap \langle\tau\rangle = \{()\}$, ce qui contredit le choix de x. De même s étant d'ordre 2, τ ou $\tau^\star$ appartient à $\{x_1, \dots, x_n\}$. Par permutation circulaire, on peut supposer $x_1 = \sigma$ alors $x_2 \in \{\tau, \tau^\star\}$. Si $x_2 = \tau^\star$, alors $(x_3 \dots x_n) x^{-1} (x_3 \dots x_n)^{-1}$ s'écrit $\tau\sigma y_3 \dots y_n$, et se trouve dans la même classe de conjugaison que x. Son appartenance à $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\}$ est donc équivalente à celle de x.

32. On remarque, d'après la question 13 qu'une orbite de D ne peut contenir qu'un seul élément z_i. Donc les orbites de $x_1 \cdots x_i D$ ne dépend que de z_i. On a $z_1 = \frac{i}{2} \in s \cdot D$ et $z_2 = \frac{-1+4i}{5} \in st \cdot D$. Comme la partie réelle de z_2 est strictement négative, et que D_0 est entièrement contenue dans

$D \cup sD$, par connexité des segments de géodésiques $[z_i, z_{i+1}]$ la partie réelle de z_i ne peut redevenir positive ou nulle qu'en repassant par z_0 ou z_1, et donc par hypothèse cela ne peut se produire que pour $z_n = z_0$.

33. Le segment de géodésique $[z_{n-1}, z_n]$ aboutit dans D, comme il ne rencontre que deux orbites de D, l'autre orbite est à choisir parmi $t^{-1}D$ ou sD. L'orbite sD contenant z_1 est déjà prise, donc reste $t^{-1}D$, puis $z_{n-1} = t^{-1} \cdot z_0$. D'où $\phi(x_1 \dots x_{n-1}) = t^{-1}$ et $x_n = \tau$.
34. Par connexité, pour que le chemin allant de z_2 vers z_{n-1} empruntant les géodésiques, aboutisse, il faut passer par l'orbite $t^{-1}sD$, car les orbites qui partagent un segment de frontière avec $t^{-1}D$ sont $t^{-2} \cdot D$, $t^{-1}s \cdot D$ et D (images par t^{-1} des orbites de D partageant un segment de frontière avec D). Pour arriver dans $t^{-2}D$ sans passer par $t^{-1}D$ il faut déjà passer par $t^{-1}sD$, donc il existe un indice $2 < i < n-1$ tel que $z_i \in t^{-1}s \cdot D$.
35. On obtient immédiatement $\phi(x_1 \cdots x_i \sigma\tau) = \mathbb{1}$ et $\phi(\tau^\star \sigma x_{i+1} \cdots, x_n) = \mathbb{1}$.
36. La longueur de $\tau^\star \sigma x_{i+1} \dots x_n$ est $n-i+2 < n$, donc par minimalité de n, $\tau^\star \sigma x_{i+1} \dots x_n$ est dans $H(\{\sigma^2, (\sigma\tau)^3\})$. La longueur de $x_1 \dots x_i \sigma\tau$ est $i+2 \leqslant n$. Le cas d'égalité avec n correspond à $i = n-2$, dans ce cas $z_{n-2} = t^{-1}s \cdot z_0$ donc $x_{n-1} = s$ puis $x_1 \dots x_i \sigma\tau = (\sigma\tau)^2 x_3 \dots x_i$ est conjugué à $x_1 \dots x_{n-2}\sigma\tau$, et $\phi((\sigma\tau)^2) = \phi(\tau^\star\sigma)$, donc $\tau^\star \sigma x_2 \dots x_{n-2}$ est dans $\ker\phi$ et de longueur $n-2$, donc dans $H(R)$, puis x, ce qui donne une contradiction. Conclusion $\ker\phi = H(R)$.
37. On considère l'application de $\{\sigma, \tau\}$ dans $Sl_2(\mathbf{Z})$ définie par $\psi(\sigma) = S$ et $\psi(\tau) = T$. D'après la question 14, et la question 22, le morphisme associé ψ $F(\{\sigma,\tau\})$ dans $Sl_2(\mathbf{Z})$ est surjectif. Par composition avec la surjection sur G, on obtient le morphisme ϕ étudié dans les questions précédentes. Donc le noyau de ψ est contenu dans $\ker\phi = H(R)$. D'autre part $\psi(\sigma^2) = -Id$, $\psi(\sigma^4) = Id$ et $\psi(\sigma^2(\sigma\tau)^3) = Id$ donc
$$H(R') = H(\{\sigma^4, \sigma^2(\sigma\tau)^3\})\rangle \subseteq \ker\psi \subsetneq H(R).$$
De plus $\psi(\sigma^2)$ étant dans le centre, pour tout x dans $F(\{\sigma,\tau\})$, $\psi(x\sigma x^{-1}) = \psi(\sigma)$. Or les classes de σ^2, et $(\tau\sigma)^3$ modulo $H(R')$ sont inverses l'une de l'autre, et on a les égalités
$$\sigma^{-1}\sigma^2(\sigma\tau)^3\sigma = \sigma^2(\tau\sigma)^3$$
$$\tau(\sigma\tau)^3\tau^{-1} = (\tau\sigma)^3.$$
On en déduit que modulo $H(R')$, $\tau\sigma^{-2}\tau^{-1}$ est dans la même classe que σ^{-2}. La classe de σ^2 est donc un élément du centre de $F(\{\sigma,\tau\})/H(R')$. Le quotient $H(R)/H(R')$ est donc engendré par la classe de σ^2 qui est d'ordre 2. Il n'y a donc pas de sous-groupe de $H(R)$, contenant $H(R')$ en dehors de $H(R)$ et $H(R')$. Comme $\ker\psi \neq H(R)$, on a $\ker\psi = H(R')$. D'où la présentation de $Sl_2(\mathbf{Z})$ par $\langle\{\sigma,\tau\}|\{\sigma^4, \sigma^2(\sigma\tau)^3\}\rangle$.

3.4 Corrigé détaillé du problème d'analyse et probabilités

Partie A : représentation de l'espace de Hardy

1. Montrons d'abord que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions holomorphes. Tout d'abord, la fonction nulle appartient clairement à $\mathcal{H}$. Soit $F, G \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbf{C}$. La fonction $F + \lambda G$ est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}_+$. De plus, d'après l'inégalité de Minkowski, on a, pour tout $y > 0$,
$$\left(\int_{\mathbf{R}} |(F+\lambda G)(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3.16}$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} + |\lambda| \left(\int_{\mathbf{R}} |G(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3.17}$$
$$\leqslant \|F\|_{\mathcal{H}} + |\lambda|\ \|G\|_{\mathcal{H}}.$$

En prenant le sup du membre de gauche pour $y > 0$, on obtient que $F + \lambda G \in \mathcal{H}$, et que $\|F + \lambda G\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}} + |\lambda| \ \|G\|_{\mathcal{H}}$. Donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions holomorphes. Vérifions que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur $\mathcal{H}$:

— Clairement, pour tout $F \in \mathcal{H}$, on a $\|F\|_{\mathcal{H}} \geqslant 0$;

— Non-dégénérescence : Soit $F \in \mathcal{H}$ telle que $\|F\|_{\mathcal{H}} = 0$. Alors pour tout $y > 0$, $\int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$. Comme F est continue sur $\mathbf{C}_+$ (car holomorphe), on en déduit que $F(x+iy) = 0$ pour tout $x + iy \in \mathbf{C}_+$. Donc $F = 0$.

— Inégalité triangulaire : on a déjà montré que $\|F + G\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}} + \ \|G\|_{\mathcal{H}}$ pour tout $F, G \in \mathcal{H}$.

— Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ quelconque, $F \in \mathcal{H}$. On a, pour tout $y > 0$,

$$\int_{\mathbf{R}} |\lambda F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x = |\lambda| \int_{\mathbf{R}} |F(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

et donc en passant au sup $\|\lambda F\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \ \|F\|_{\mathcal{H}}$.

2. (a) Soit $z \in \mathbf{C}_+$ quelconque. On écrit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, $y > 0$. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en observant que $|e^{i\xi z}| = e^{-\xi y}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f_0(\xi)| \, |e^{i\xi z}| \, \mathrm{d}\xi &\leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)} \left(\int_0^\infty e^{-2\xi y} d\xi \right)^{1/2} \\ &\leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)} \frac{1}{\sqrt{2y}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Donc la fonction $\xi \in [0, +\infty[\mapsto f_0(y) e^{i\xi z}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et F est bien définie.

(b) Soit $\delta > 0$ quelconque. On observe que :

— Pour tout $\xi \in [0, +\infty[$, la fonction $z \in \mathbf{C}_+ \mapsto f_0(\xi) e^{i\xi z}$ est continue ;

— Pour tout $z \in \mathbf{C}_+$ tel que $\mathrm{Im}(z) \geqslant \delta$, pour tout $\xi \in [0, +\infty[$, on a

$$|f_0(\xi) e^{i\xi z}| \leqslant |f_0(\xi)| e^{-i\xi\delta},$$

et

$$\int_0^\infty |f_0(\xi)| e^{-i\xi\delta} \, d\xi \leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)} \frac{1}{\sqrt{2\delta}} < +\infty.$$

D'après les théorèmes de continuité des intégrales à paramètre, F est continue sur $\{z \in \mathbf{C}_+, \mathrm{Im}(z) \geqslant \delta\}$ pour tout $\delta > 0$, et par conséquent sur $\mathbf{C}_+$.

(c) Pour tout $\xi \geqslant 0$, $h \in \mathbf{C} \backslash \{0\}$ tel que $|h| \leqslant \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}$, on a

$$\left| \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} \right| = \left| i \int_0^\xi e^{ith} \, \mathrm{d}t \right| \tag{3.19}$$

$$\leqslant \int_0^\xi \exp(-t \mathrm{Im}(h)) \, \mathrm{d}t \tag{3.20}$$

$$\leqslant \int_0^\xi \exp(t \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}) \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\mathrm{Im}(z_0)} \exp\left(\xi \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2} \right).$$

(d) Soit $z_0 \in \mathbf{C}_+$, et soit $h \in \mathbf{C} \backslash \{0\}$ tel que $|h| \leqslant \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{2}$. On écrit

$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_0(\xi) e^{i\xi z_0} \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} \, d\xi.$$

On a :

— Pour tout $\xi \geqslant 0$, $\lim_{h \to 0} f_0(\xi) e^{i\xi z_0} \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} = i\xi f_0(\xi) e^{i\xi z_0}$.

— D'après la question précédente, pour tout $\xi \geqslant 0$, et pour tout $h \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ tel que $|h| \leqslant \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{2}$,

$$\begin{aligned}\left|f_0(\xi)e^{i\xi z_0}\frac{e^{i\xi h}-1}{h}\right| &\leqslant |f_0(\xi)|\exp(-\operatorname{Im}(z_0)\xi)\frac{2}{\operatorname{Im}(z_0)}\exp\left(\xi\frac{\operatorname{Im}(z_0)}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{2}{\operatorname{Im}(z_0)}|f_0(\xi)|\exp\left(-\frac{\operatorname{Im}(z_0)}{2}\xi\right),\end{aligned} \tag{3.21}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{2}{\operatorname{Im}(z_0)}|f_0(\xi)|\exp\left(-\frac{\operatorname{Im}(z_0)}{2}\xi\right) \leqslant \frac{2}{\operatorname{Im}(z_0)}\|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Im}(z_0)}}.$$

D'après les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètre, F est dérivable (au sens complexe) en z_0, de dérivée

$$F'(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty i\xi f_0(\xi)e^{i\xi z_0}d\xi.$$

Donc F est holomorphe sur $\mathbf{C}_+$.

(e) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}\times]0, +\infty[$. On a

$$F(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f_0(\xi)e^{-\xi y}e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Définissons $g_y : \xi \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{1}_{\xi>0}f_0(\xi)e^{-\xi y}$. Alors $g_y \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$, et par définition $F(x+iy) = \widehat{g_y}(-x)$. D'après l'identité de Plancherel, la fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto F(x+iy)$ est de carré intégrable, et

$$\int_{\mathbf{R}}|F(x+iy)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}|g_y(\xi)|^2 d\xi = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2\exp(-2\xi y)\,\mathrm{d}\xi.$$

(f) Daprès la question 2.(d), F est holomorphe dans $\mathbf{C}_+$. De plus, d'après la question 2. (e), on a, pour tout $y > 0$,

$$\int_{\mathbf{R}}|F(x+iy)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2\exp(-2\xi y)\,\mathrm{d}\xi \leqslant \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}.$$

Donc

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}|F(x+iy)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}.$$

En particulier, $F \in \mathcal{H}$ et $\|F\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|f_0\|_{L^2([0,+\infty[)}$.
Montrons à présent qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente : pour tout $y > 0$, on a $|f_0(\xi)|^2\exp(-2\xi y) \leqslant |f_0(\xi)|^2$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbf{R}}|F(x+iy)|^2\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0}\int_0^\infty |f_0(\xi)|^2\exp(-2\xi y)\,\mathrm{d}\xi = \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}.$$

Donc $\sup_{y>0}\int_{\mathbf{R}}|F(x+iy)|^2\,\mathrm{d}x = \|f_0\|^2_{L^2([0,+\infty[)}$

3. (a) Soit $F \in \mathcal{H}$, $\delta > 0$, $\zeta \in \mathbf{C}_+$ tel que $\operatorname{Im}(\zeta) > \delta$, et $r \in]0, \delta]$. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre ζ et de rayon r. Les hypothèses sur ζ et r assurent que $\mathcal{C} \subset \mathbf{C}_+$. D'après la formule intégrale de Cauchy, comme F est holomorphe dans $\mathbf{C}_+$,

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{F(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z.$$

Si $z \in \mathcal{C}$, on écrit $z = \zeta + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\zeta + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

En mutlipliant l'égalité précédente par r et en intégrant sur $]0, \delta]$, on obtient

$$\frac{\delta^2}{2} F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} F(\zeta + re^{i\theta}) r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r.$$

En utilisant les formules de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on arrive à

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy| \leqslant \delta} F(\zeta + x + iy)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

(b) On remarque que

$$\frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy| \leqslant \delta} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1$$

Par conséquent, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou l'inégalité de Jensen, on obtient

$$|F(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy| \leqslant \delta} |F(\zeta + x + iy)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Or le disque du plan complexe $\{(\zeta + x + iy) \in \mathbf{C},\ |x + iy| \leqslant \delta\}$ est inclus dans le carré $\mathcal{R}$ de côté 2δ défini par $\mathcal{R} := \{(\xi + i\eta) \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(\zeta) - \delta \leqslant \xi \leqslant \mathrm{Re}(\zeta) + \delta,\ \mathrm{Im}(\zeta) - \delta \leqslant \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta\}$. De plus, $\mathrm{Im}(\zeta) - \delta > 0$. Donc

$$\begin{aligned} |F(\zeta)|^2 &\leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{\mathcal{R}} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \qquad (3.22)\\ &\leqslant \frac{2}{\pi\delta} \sup_{\mathrm{Im}(\zeta) - \delta \leqslant \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta} \int_{\mathrm{Re}(\zeta) - \delta}^{\mathrm{Re}(\zeta) + \delta} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi \qquad (3.23)\\ &\leqslant \frac{2}{\pi\delta} \sup_{0 < \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta} \int_{\mathbf{R}} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $F \in \mathcal{H}$, donc

$$\sup_{0 < \eta \leqslant \mathrm{Im}(\zeta) + \delta} \int_{\mathbf{R}} |F(\xi + i\eta)|^2\, \mathrm{d}\xi \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

On en déduit que $\sup_{\zeta \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta) > \delta} |F(\zeta)| \leqslant \sqrt{2/(\pi\delta)} \|F\|_{\mathcal{H}}$. Donc F est bornée sur l'ensemble $\{\zeta \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta) > \delta\}$.

(c) Soit $F \in \mathcal{H}$ vérifiant l'hypothèse **(H)**. Soit $\delta > 0$, et soit $y_1, y_2 \in]\delta, +\infty[$. Justifions tout d'abord que l'intégrale $\int_{L_j} F(z) e^{-iz\xi}\, dz$ est bien définie pour $j = 1, 2$: puisque F vérifie l'hypothèse **(H)** et que $y_j > \delta$, on a, pour tout $x + iy_j \in L_j$, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$|F(x + iy_j) e^{-i\xi z}| \leqslant e^{y_j \xi} \frac{C_\delta}{1 + x^2},$$

et le membre de droite est intégrable (en x) sur $\mathbf{R}$. Donc la fonction $z \mapsto F(z) e^{-i\xi z}$ est intégrable sur L_j. Remarquons que si $y_1 = y_2$, l'égalité demandée est triviale, on se concentre donc sur $y_1 \neq y_2$, et sans perte de généralité on suppose $y_1 < y_2$.

Soit $R \geqslant 1$ quelconque. On considère le lacet γ_R suivant, que l'on oriente dans le sens trigonométrique :

$$\begin{aligned} \gamma_R := &\{x + iy_1,\ x \in [-R, R]\} \cup \{R + iy,\ y \in [y_1, y_2]\} \qquad (3.24)\\ &\cup \{x + iy_2,\ x \in [-R, R]\} \cup \{-R + iy,\ y \in [y_1, y_2]\}. \end{aligned}$$

On remarque que $\gamma_R \subset \mathbf{C}_+$. Pour $\xi \in \mathbf{R}$ quelconque, on considère la fonction $z \in \mathbf{C}_+ \mapsto F(z)\exp(-i\xi z)$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbf{C}_+$ comme produit de fonctions holomorphes. D'après le théorème intégral de CAUCHY,

$$\int_{\gamma_R} F(z)\exp(-i\xi z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Or

$$\int_{\gamma_R} F(z)\exp(-i\xi z)\,\mathrm{d}z \tag{3.25}$$

$$= \int_{-R}^{R} F(x+iy_1)e^{-i\xi x + y_1\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} F(R+iy)e^{-i\xi R + yxi}\,dy \tag{3.26}$$

$$- \int_{-R}^{R} F(x+iy_2)e^{-i\xi x + y_2\xi}\,\mathrm{d}x - \int_{y_1}^{y_2} F(-R+iy)e^{i\xi R + yxi}\,dy.$$

Puisque $z \mapsto F(z)\exp(-i\xi z)$ est intégrable sur L_j pour $j = 1, 2$, on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x+iy_j)e^{-i\xi x + y_j\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{L_j} F(z)e^{-iz\xi}\,dz.$$

De plus,

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} F(\pm R+iy)e^{\mp i\xi R + yxi}\,dy\right| \leqslant e^{y_2|\xi|}(y_2-y_1)\frac{C_\delta}{1+R^2},$$

et le membre de droite tend vers zéro quand $R \to \infty$. En passant à la limite, on obtient donc, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\int_{L_1} F(z)e^{-iz\xi}\,dz = \int_{L_2} F(z)e^{-iz\xi}\,dz.$$

En utilisant les notations de l'énoncé, on a

$$\int_{L_j} F(z)e^{-iz\xi}\,dz = \int_{\mathbf{R}} F(x+iy_j)e^{-i\xi x + y_j\xi}\,\mathrm{d}x = e^{y_j\xi}\int_{\mathbf{R}} F_{y_j}(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \tag{3.27}$$

$$= e^{y_j\xi}\sqrt{2\pi}\widehat{F_{y_j}}(\xi).$$

On en déduit donc que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, pour tout $y_1, y_2 > \delta$,

$$\widehat{F_{y_1}}(\xi)e^{y_1\xi} = \widehat{F_{y_2}}(\xi)e^{y_2\xi}.$$

Comme δ est arbitraire, on en déduit que cette égalité est vérifiée pour tout $y_1, y_2 > 0$.

(d) Soit $F \in \mathcal{H}$ quelconque. D'après la question 3.(b), pour tout $\delta > 0$, F est bornée sur l'ensemble $\{\zeta \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta) > \delta\}$, on pose donc $C_\delta = \sup_{\zeta\in\mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\zeta)>\delta} |F(\zeta)|$. Pour tout $\varepsilon, \delta > 0$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y > \delta$, on a

$$|F^\epsilon(x+iy)| = \frac{|F(x+iy)|}{|1-i\varepsilon z|^2} \leqslant \frac{C_\delta}{(1+\varepsilon y)^2 + \varepsilon^2 x^2} \leqslant \frac{C_\delta}{\varepsilon^2(1+x^2)}.$$

Donc F^ϵ vérifie l'hypothèse **(H)**. De plus, on a les propriétés suivantes :

— $|F^\varepsilon(z)| \leqslant |F(z)|$ pour tout $z \in \mathbf{C}_+$ (donc en particulier $|F^\varepsilon(z) - F(z)|^2 \leqslant 4|F(z)|^2$ pour tout $z \in \mathbf{C}_+$) ;

— $\lim_{\varepsilon\to 0} F^\varepsilon(z) = F(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}_+$;

— $\int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^2 dx \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2 < +\infty$ pour tout $y > 0$.

D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $y > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{R}} |F^{\varepsilon}(x+iy) - F(x+iy)|^2 \, dx = 0.$$

Autrement dit, $\|F_y^{\varepsilon} - F_y\|_{L^2(\mathbf{R})} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.
D'après la question 3.(c), comme F^{ϵ} vérifie l'hypothèse **(H)**,

$$\widehat{F_{y_1}^{\varepsilon}}(\xi) e^{y_1 \xi} = \widehat{F_{y_2}^{\varepsilon}}(\xi) e^{y_2 \xi} \quad \forall y_1, y_2 > 0. \tag{3.28}$$

D'après l'identité de Plancherel, on a, pour tout $y > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\widehat{F_y^{\varepsilon}} - \widehat{F_y}\|_{L^2(\mathbf{R})} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|F_y^{\varepsilon} - F_y\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0.$$

Or la convergence dans L^2 entraine la convergence presque partout à une sous-suite près. Ainsi, il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et des ensembles B_{y_1}, $B_{y_2} \subset \mathbf{R}$ de mesure de Lebesgue nulle, tels que, pour $j = 1, 2$,

$$\lim_{k \to \infty} \widehat{F_{y_j}^{\varepsilon_k}}(\xi) = \widehat{F_{y_j}}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{R} \backslash B_{y_j}.$$

On pose $A_{y_1, y_2} = B_{y_1} \cup B_{y_2}$. Alors $A_{y_1, y_2} \subset \mathbf{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle, et en passant à la limite dans (3.28), on obtient

$$\widehat{F_{y_1}}(\xi) e^{y_1 \xi} = \widehat{F_{y_2}}(\xi) e^{y_2 \xi} \quad \forall \xi \in \mathbf{R} \backslash A_{y_1, y_2}.$$

(e) On prend $y_1 = 1$, $y_2 = y$ dans la question précédente, et on pose $f_0(\xi) = \widehat{F_1}(\xi) e^{\xi}$. Comme $\widehat{F_1} \in L^2(\mathbf{R})$, f_0 est de carré intégrable sur tout compact de $\mathbf{R}$, et pour tout $y > 0$, pour tout $\xi \in \mathbf{R} \backslash A_{1,y}$,

$$\widehat{F_y}(\xi) = f_0(\xi) e^{-\xi y}.$$

(f) Soit $y > 0$ quelconque. On rappelle que $\widehat{F_y} \in L^2(\mathbf{R})$, et que $A_{1,y}$ est de mesure nulle. Donc

$$\int_{\mathbf{R}} |\widehat{F_y}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi.$$

Par ailleurs, d'après l'égalité de Plancherel, $\|F_y\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|\widehat{F_y}\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 &= \sup_{y>0} \|F_y\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = \sup_{y>0} \|\widehat{F_y}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \\ &= \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.29}$$

(g) Par définition de E_n, on a, pour tout $y > 0$,

$$\frac{1}{n^2} e^{2y/n} \mathrm{mes}(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y} \, \mathrm{d}\xi.$$

Donc

$$\mathrm{mes}(E_n) \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2 n^2 e^{-2\frac{y}{n}} \quad \forall y > 0.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $y > 0$ et que le membre de gauche ne dépend pas de y, on en déduit, en faisant tendre y vers $+\infty$, que $\mathrm{mes}(E_n) = 0$. Par additivité de la mesure de Lebesgue, on a également

$$\mathrm{mes}\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n \right) = 0.$$

Or $\cup_{n \in \mathbf{N}} E_n = \{\xi < 0,\ f_0(\xi) \neq 0\}$. Donc $f_0(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi < 0$.

(h) Les résultats des deux questions précédentes impliquent que

$$\sup_{y>0} \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\, \mathrm{d}\xi = \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Or d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{y\to 0^+} \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\, \mathrm{d}\xi = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi \leqslant \|F\|_{\mathcal{H}}^2 < +\infty,$$

donc $f_0 \in L^2([0,+\infty[)$. De plus, on a $\widehat{F_y}(\xi) = \mathbf{1}_{\xi>0} f_0(\xi) e^{-\xi y}$ pour tout $y > 0$ et pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$. Donc $\widehat{F_y} \in L^1(\mathbf{R})$ (comme produit de deux fonctions de L^2), et d'après la formule de transformée de Fourier inverse, on a, pour tout $y > 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F(x+iy) = F_y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \widehat{F_y}(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_0(\xi) e^{-\xi y} e^{i\xi x}\, \mathrm{d}x.$$

Donc F est reliée à f_0 par la formule (1).

Partie B : comportement des fonctions de l'espace de Hardy lorsque $y \to 0$

Soit $F \in \mathcal{H}$ et soit $f_0 \in L^2([0,+\infty[)$ telle que la formule (1) de l'énoncé soit vérifiée.

4. On étend f_0 par zéro sur $]-\infty, 0[$, et on note encore f_0 l'extension, de sorte que $f_0 \in L^2(\mathbf{R})$. On définit $g_0 = \mathcal{F}^{-1} f_0 \in L^2(\mathbf{R})$. D'après la définition (1), on a, avec les notations de la partie précédente, $F_y = \mathcal{F}^{-1}(\xi \in \mathbf{R} \mapsto f_0(\xi) e^{-\xi y})$ pour tout $y > 0$. Par conséquent, pour tout $y > 0$, d'après l'égalité de Plancherel,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} |F(x+iy) - g_0(x)|^2\, \mathrm{d}x &= \|F_y - g_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 && (3.30)\\
&= \|\widehat{F_y} - \widehat{g_0}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 && (3.31)\\
&= \int_0^\infty \left| f_0(\xi) e^{-\xi y} - f_0(\xi) \right|^2 && (3.32)\\
&= \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 \left(1 - e^{-\xi y}\right)^2 \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée, le membre de droite tend vers zéro quand $y \to 0$. Soit $f_0' \in L^2([0,+\infty[)$ une autre fonction telle que la formule (1) de l'énoncé soit vérifiée. On définit de nouveau $g_0' = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} f_0')$. On a donc $\lim_{y\to 0} \|F_y - g_0'\|_{L^2} = 0$. Par unicité de la limite dans $L^2(\mathbf{R})$, nécessairement $g_0 = g_0'$ dans $L^2(\mathbf{R})$. Donc $\widehat{g_0} = \widehat{g_0'}$ et $f_0 = f_0'$.

5. Pour tous $x \in \mathbf{R}$ et $y \in]0,+\infty[$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-|\xi| y + i\xi x}\, \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^0 e^{\xi(y+ix)}\, d\xi + \int_0^{+\infty} e^{\xi(-y+ix)} d\xi = \frac{1}{y+ix} - \frac{1}{-y+ix} = \frac{2y}{y^2+x^2}.$$

6. On vérifie aisément que

$$P_y(t) = \frac{1}{y} P\left(\frac{t}{y}\right), \text{ avec } P(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in \mathbf{R},\ \forall y > 0.$$

La fonction P est intégrable sur $\mathbf{R}$ et

$$\int_{\mathbf{R}} P(s)\, ds = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}(+\infty) - \operatorname{Arctan}(-\infty)\right] = 1.$$

7. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On écrit
$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $y > 0$, considérons la fonction $G : (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mapsto f(t) e^{-i\xi t} e^{-|\xi| y + i\xi x}$. Alors $|G(t,\xi)| \leqslant |f(t)| e^{-|\xi| y}$, et d'après le théorème de Fubini-Tonelli,
$$\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} |G(t,\xi)| \, dt \, \mathrm{d}\xi = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt \right) \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-|\xi| y} dy \right) < +\infty,$$
donc G est intégrable sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. D'après le théorème de Fubini-Lebesgue,
$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi| y + i\xi x} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} G(t,\xi) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\xi \tag{3.33}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi t} e^{-|\xi| y + i\xi x} d\xi \right) f(t) \, \mathrm{d}t.$$
D'après la question 5,
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi t} e^{-|\xi| y + i\xi x} d\xi = \frac{2y}{y^2 + (x-t)^2} = 2\pi P_y(x-t).$$
Donc
$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi| y + i\xi x} \, \mathrm{d}\xi = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) P_y(x-t) \, \mathrm{d}t.$$
En changeant de variable dans la dernière intégrale ($u = x - t$), on obtient l'égalité recherchée. Supposons que $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, et posons $f_0 = \widehat{g_0}$. Puisque $f_0(\xi) = 0$ pour tout $\xi < 0$, d'après l'égalité précédente, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $y > 0$,
$$F(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f_0(\xi) e^{i\xi x - \xi y} \, \mathrm{d}\xi \tag{3.34}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \widehat{g_0}(\xi) e^{-|\xi| y + i\xi x} \, \mathrm{d}\xi \tag{3.35}$$
$$= \int_{\mathbf{R}} g_0(x-t) P_y(t) \, \mathrm{d}t.$$

8. Tout d'abord, remarquons que $\int_{\mathbf{R}} P_y = \int_{\mathbf{R}} P = 1$.
Si $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $y > 0$,
$$F(x+iy) - g_0(x) = \int_{\mathbf{R}} \left(g_0(x-t) - g_0(x) \right) P_y(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \left(g_0(x-yt) - g_0(x) \right) P(t) \, \mathrm{d}t.$$
Dans l'intégrale du membre de droite, on a $\lim_{y\to 0} \left(g_0(x-yt) - g_0(x) \right) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et
$$\left| \left(g_0(x-yt) - g_0(x) \right) P(t) \right| \leqslant 2\|g_0\|_\infty P(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \ \forall y > 0,$$
avec $P \in L^1(\mathbf{R})$. D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\lim_{y\to 0} \left(F(x+iy) - g_0(x) \right) = 0.$$

Partie C : transformée de Hardy

Soit

$$E = \{g \in L^2(\mathbf{R}),\ \widehat{g}(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \leqslant 0\}.$$

9. Clairement, la fonction nulle appartient à E, et si $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbf{C}$, on a $f + \lambda g \in E$ par linéarité de la transformée de Fourier. Donc E est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbf{R})$. Montrons qu'il est fermé : soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E qui converge vers f dans $L^2(\mathbf{R})$. D'après l'égalité de Plancherel, on a également $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0$. Donc il existe une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que $\widehat{f_{n_k}}(\xi) \to \widehat{f}(\xi)$ quand $k \to \infty$ pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$. Comme $\widehat{f_{n_k}}(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$, on a aussi $\widehat{f}(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$. Donc $f \in E$. Par conséquent E est fermé.
10. Soit $g \in L^2(\mathbf{R})$. On pose $\tilde{g} := \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto \mathbf{1}_{\xi>0}\, \widehat{g}) \in L^2(\mathbf{R})$. Montrons que $\tilde{g} = \Pi(g)$:
    — On a clairement $\tilde{g} \in E$;
    — Soit $h \in E$ quelconque. Alors d'après l'identité de Parseval,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} (g - \tilde{g})\bar{h} &= \int_{\mathbf{R}} (\hat{g}(\xi) - \mathbf{1}_{\xi>0}\, \widehat{g}(\xi))\,\overline{\widehat{h}(\xi)} \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\xi\leqslant 0}\hat{g}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

    Comme $h \in E$, $\widehat{h}(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$, et par conséquent le membre de droite est identiquement nul. Donc $g - \tilde{g} \in E^\perp$.

    Donc $\tilde{g} = \Pi(g)$.
11. Soit $g \in E$ quelconque. On pose $f_0 = \hat{g} \in L^2(\mathbf{R})$. Par hypothèse, $f_0(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi \leqslant 0$. On définit F par la formule (1) de l'énoncé. Alors $F \in \mathcal{H}$ d'après la question 2, et d'après la partie B, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{y\to 0} F(x+iy) = g(x).$$

    Par ailleurs, soit $H \in \mathcal{H}$ telle que $\lim_{y\to 0} H(x+iy) = g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$. D'après la question 3, il existe $h_0 \in L^2([0, +\infty[)$ telle que H et h_0 sont reliées par la formule (1). D'après la partie B, on a alors $\lim_{y\to 0} H(x+iy) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} h_0)(x)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$. Donc $g = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+} h_0)$, et $h_0 = f_0$. Par suite, $H = F$.
    Ainsi, il existe une unique fonction $F \in \mathcal{H}$ telle que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{y\to 0} F(x+iy) = g(x).$$

12. Par définition, $Hf = i(f - 2\Pi f)$, donc $Hf \in L^2(\mathbf{R})$. De plus, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a, d'après la question 10,

$$\widehat{Hf}(\xi) = i\left(\hat{f}(\xi) - 2\mathbf{1}_{\xi>0}\hat{f}(\xi)\right) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi).$$

    Si f est à valeurs réelles, on a, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$, $\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi)$. Par conséquent, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\overline{\widehat{Hf}(\xi)} = i\mathrm{sgn}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)} = -i\mathrm{sgn}(-\xi)\widehat{f}(-\xi)\widehat{Hf}(-\xi).$$

    Donc Hf est à valeurs réelles.

13. Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ à valeurs réelles. On pose $g = 2\Pi f \in E$. D'après la question 11, il existe une unique fonction $F \in \mathcal{H}$ telle que pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ $\lim_{y\to 0} F(x+iy) = g(x)$. De plus, par définition, $g = f + iHf$ et f et Hf sont à valeurs réelles. Donc $f = \mathrm{Re}(g)$ et $Hf = \mathrm{Im}(g)$. Par conséquent, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{y\to 0} \mathrm{Re}(F(x+iy)) = f(x), \quad \lim_{y\to 0} \mathrm{Im}(F(x+iy)) = (Hf)(x).$$

14. Comme à la question précédente, on pose $g = 2\Pi f = f + iHf \in E$, et on a, d'après la partie B,

$$F(x+iy) = \int_{\mathbf{R}} g(x-t)P_y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme P_y, f et Hf sont à valeurs réelles, on a

$$u(x,y) = (f * P_y)(x) = \mathrm{Re}(F(x+iy)), \quad v(x,y) = (Hf * P_y)(x) = \mathrm{Im}(F(x+iy)).$$

Donc u et v sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction holomorphe F. D'après les formules de Cauchy-Riemann, ce sont des fonctions harmoniques conjuguées :

$$\begin{aligned} \Delta u = \Delta v = 0 \quad &\text{dans } \mathbf{R}\times]0,+\infty[,\\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad &\text{dans } \mathbf{R}\times]0,+\infty[. \end{aligned}$$

15. Soit $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ quelconques. Par définition de l'adjoint, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} H^*f\,\bar{g} &= \int_{\mathbf{R}} f\,\overline{Hg} && (3.37)\\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{f}\,\overline{\widehat{Hg}} \quad (\text{identité de Parseval}) && (3.38)\\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)\,\overline{-i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi && (3.39)\\ &= \int_{\mathbf{R}} i\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi && (3.40)\\ &= -\int_{\mathbf{R}} \widehat{Hf}\overline{\hat{g}} && (3.41)\\ &= -\int_{\mathbf{R}} Hf\,\bar{g}. \end{aligned}$$

Donc $H^* = -H$. De plus, pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{H^2 f}(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{Hf}(\xi) = -\hat{f}(\xi).$$

Donc $H^2 = -I$. On en déduit que $H^*H = HH^* = -H^2 = I$. Donc H est un opérateur unitaire.

Partie D : transformée de Hardy et multiplicateurs de Fourier

16. Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$, $f \in L^2(\mathbf{R})$ quelconque. On a

$$\widehat{T_1 \circ T_2}(\hat{f}) = \widehat{T_1 \circ T_2(f)} = \widehat{T_1}\widehat{T_2(f)} = \widehat{T_1}(\widehat{T_2}\hat{f}) = \widehat{T_1} \circ \widehat{T_2}(\hat{f}).$$

Donc $\widehat{T_1 \circ T_2} = \widehat{T_1} \circ \widehat{T_2}$.

17. Soit $h \in \mathbf{R}$ quelconque. Par linéarité de l'intégrale et invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue, τ_h est clairement une application linéaire sur $L^2(\mathbf{R})$, et de plus $\|\tau_h f\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R})}$ pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$. Donc $\tau_h : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ est continue. On va proiuver que $\widehat{\tau_h} \circ \widehat{H} = \widehat{H} \circ \widehat{\tau_h}$: on montre facilement que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$, $\widehat{\tau_h}\hat{f}(\xi) = e^{ih\xi}\hat{f}(\xi)$, de sorte que

$$\widehat{\tau_h} \circ \widehat{H}(\hat{f})(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)e^{ih\xi}\hat{f}(\xi) = \widehat{H} \circ \widehat{\tau_h}(\hat{f})(\xi).$$

Donc $\widehat{\tau_h \circ H} = \widehat{H \circ \tau_h}$, et par suite $\tau_h \circ H = H \circ \tau_h$.

18. Soit $a > 0$ quelconque. Comme à la question précédente, on commence par calculer $\widehat{\delta_a}$ et on vérifie que $\widehat{H}$ et $\widehat{\delta_a}$ commutent. On a, pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$,

$$\left(\widehat{\delta_a} \hat{f}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(ax)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

Donc

$$\widehat{\delta_a} \circ \widehat{H}(\hat{f})(\xi) = \frac{1}{a}\widehat{Hf}\left(\frac{\xi}{a}\right) = -\frac{i}{a}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \widehat{H} \circ \widehat{\delta_a}(\hat{f})(\xi).$$

Ainsi, on a $\widehat{\delta_a} \circ \widehat{H} = \widehat{H} \circ \widehat{\delta_a}$ et par suite, $\delta_a \circ H = H \circ \delta_a$.

Chapitre 4

Épreuves orales

Note préliminaire Les compétences techniques sont au cœur de l'épreuve de leçons de mathématiques et de l'épreuve de modélisation mathématique. La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. Le candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clefs de la notion abordée, les illustrer par des exemples et applications et être en mesure de développer au tableau des résultats représentatifs de cette leçon. Dans la seconde épreuve, le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. Le candidat est invité à présenter et discuter, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et à expliquer comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique.

Le jury rappelle que s'écarter du programme n'est en aucun cas une exigence pour prétendre à des notes très satisfaisantes ; le jury encourage surtout les préparations et les candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases.

4.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)

Les thèmes des leçons proposées au concours docteurs sont une sélection de l'ensemble des leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités du concours standard. On trouvera en annexe la liste des leçons qui seront utilisées en 2019. Proposer un plan de leçon et réaliser le développement d'une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé, dans un temps limité, sans recours à des notes, constituent des exercices difficiles qui ne s'improvisent pas et auxquels les candidats doivent impérativement s'entraîner. Il est recommandé de s'exercer à cet exercice au sein d'une préparation universitaire, où les candidats docteurs, forts d'une plus grande maturité scientifique, peuvent d'ailleurs jouer un rôle d'émulation très positif. Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces champs. En complément de l'intitulé des leçons, les tirages donnaient cette année un court résumé des modalités de l'épreuve. Le candidat choisit laquelle de ces deux leçons il va exposer au jury. Le jury recommande une lecture minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons.

Il est toujours conseillé aux candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé potentiellement inspiré de leurs thèmes de recherche mais débordant largement du programme. Le jury estime que le programme du concours contient un matériel technique suffisamment étoffé pour évaluer les capacités à remplir les missions du professeur agrégé.

Il est heureux que les candidats de la session 2018 se soient débarrassés de l'attitude condescendante observée en 2017, qui se traduisait notamment par des digressions hors-programme outrancières, une répugnance à détailler arguments et définitions et de grandes difficultés à s'exprimer clairement sur les notions de base. Le jury espère que cette tendance, sûrement signe d'une meilleure préparation au concours, se confirmera à l'avenir.

4.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B, C et D)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. Les candidats de la session 2018 étaient, dans l'ensemble, bien préparés à cette épreuve, y compris dans l'exercice d'illustration informatique. La plupart d'entre eux a su éviter les écueils suivants :

— se lancer dans un hors sujet, caractérisé par une tentative de replacer le contenu d'une leçon au détriment de l'analyse du texte ;

— négliger l'illustration informatique, parfois par manque d'entraînement sur les logiciels du concours.

Les candidats docteurs peuvent tirer profit de leur recul scientifique dans cette épreuve qui nécessite des qualités de synthèse et une capacité à balayer le programme de manière transverse.

Le jury encourage les futurs candidats à bien se préparer à cette épreuve en s'exerçant sur les textes rendus publics et en se familiarisant avec l'environnement informatique du concours accessibles sur le site http://www.agreg.org.

4.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Cette épreuve est spécifique au concours spécial ; sa matière est fournie par un document PDF de 12 pages maximum envoyé par les candidats dix jours avant le début des épreuves d'admission (en l'espèce la date butoir était donc le 9 juin à 23h59). Ce document consiste en un dossier scientifique présentant le parcours, les travaux de recherche et, le cas échéant, les activités d'enseignement et/ou de valorisation de la recherche.

Chaque dossier est confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'interrogation. L'affectation des dossiers prend garde à ne pas confier cette part de l'évaluation à un expert du sujet de thèse du candidat. L'appréciation du document fourni fait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury sont réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier. Un débat préparatoire réunissait les membres de la commission avant les épreuves afin d'échanger sur les dossiers et d'organiser une interrogation personnalisée, adaptée aux profils des candidats.

Les dossiers fournis étaient dans l'ensemble soignés et de qualité, montrant un investissement incontestable des candidats pour mettre en valeur leur parcours. Le jury conseille aux candidats de penser dans un même élan le document écrit et la présentation orale, en ayant bien présent à l'esprit que le document fournit la base de la présentation et qu'il sera disponible tout au long de celle-ci. Le jury recommande aux candidats d'inclure dans leur dossier un minimum d'éléments biographiques (certains dossiers ne mentionnaient même pas le nom du candidat !), notamment des informations sur la mobilité géographique et thématique, le parcours académique et/ou professionnel, les évolutions après thèse...

qui peuvent donner du relief à la discussion. De manière générale, la rédaction du dossier doit être guidée par une réflexion sur la question « Une expérience dans la recherche est-elle un plus pour un enseignant ? ». La dimension de mise en perspective didactique du dossier occupe une place importante de son évaluation : on attend des candidats qu'ils mettent en lumière leurs savoirs, les méthodes et démarches présentes dans leurs travaux et qu'ils expliquent comment elles pourraient être réinvesties dans un enseignement sur l'éventail « lycée - L3 ». Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si le candidat juge un tel choix plus pertinent (cela peut être le cas pour des candidats ayant une expérience post-thèse assez longue). Davantage que les travaux proprement dits du candidat, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. Les candidats peuvent faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidats ne peuvent donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Le jury déplore que cette possibilité ne puisse pas être offerte aux candidats. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par les candidats en amont du concours. Ce document peut notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu, qui peuvent même être organisées sous forme d'animation à l'intérieur du fichier PDF. Il est aussi possible d'insérer des liens hypertextes pour naviguer à l'intérieur du document (il n'est toutefois pas permis d'exploiter des liens vers des sites web). Ces dispositifs peuvent permettre de rendre l'exposé plus vivant et quelques candidats ont profité de cette opportunité. Cependant, il n'est pas autorisé de se munir de son manuscrit de thèse ou d'articles de recherche, ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation.

Il était rappelé en début de préparation que l'épreuve a pour objectif « d'apprécier l'aptitude du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Typiquement il était recommandé de construire un discours à destination d'un auditoire de niveau au plus M2 de mathématiques ; l'épreuve n'est pas un séminaire réservé à un public de chercheurs sur le sujet de thèse du candidat. Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts des thèmes de recherche du candidat. L'aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes, à la fois dans le dossier écrit et durant la prestation orale, la capacité à s'adapter à des questions de niveaux variés, occupent une part substantielle de la grille de notation.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Chaque candidat reçoit donc une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Lors de cette session, les questions posées étaient les suivantes :

— *Illustrez une démarche de recherche, en proposant une activité pratique de mathématiques de niveau lycée ou L1, L2. On précisera bien le niveau choisi.*
— *Proposez un thème, lié à votre parcours, pouvant être développé lors d'un cours ou d'une activité pratique de mathématiques (exercice, vulgarisation, projet, etc.) de niveau lycée ou L1, L2. On précisera bien le niveau choisi.*
— *Comment expliqueriez-vous vos travaux ou domaine de recherche lors d'un cours de mathématique de niveau lycée ou L1, L2 tout en établissant un lien avec un élément du programme ? On précisera bien le niveau choisi.*

Le jury souligne le caractère totalement ouvert de ces questions pour lesquelles il n'y a pas de réponse « type » attendue. Néanmoins, le jury attend une description assez précise et concrète de la séance qui pourrait être proposée à des élèves ou des étudiants, avec des exemples et des exercices le cas échéant. Certains candidats ont fait cet effort de réfléchir à leur séance de cours ou TD et décrivaient en détail la séquence, en mettant bien en avant une démarche, bâtie sur une question, un calcul, une simulation, et conduisant à des déductions. Si ces propositions étaient plus ou moins pertinentes, avec un niveau plus ou moins bien identifié/adapté, elles ont toujours été valorisées par rapport aux affirmations laconiques « cette notion pourrait être présentée à des étudiants de L1-L2 », « telle partie pourrait être comprise par des étudiants de L1-L2 »... qui, d'ailleurs, bien souvent se révélaient être d'un niveau bien trop élevé pour le public visé. Le dialogue s'est systématiquement attaché à clarifier les modalités de mise en œuvre pratique et concrète de la séquence proposée.

L'épreuve proprement dite comprend deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, le candidat organise librement la présentation de son dossier (durant au moins 20 minutes) et la réponse à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l'interrogation est consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue, personnalisé suivant le parcours du candidat, explore divers aspects du dossier. On peut y distinguer

- des questions en lien direct avec la question posée pour la préparation de l'épreuve. L'objectif est ici de discuter du contenu mathématique de la démarche proposée et de sa mise en perspective didactique.
- des questions sur les mathématiques, les démarches et les méthodes présentées par le candidat lors de son exposé ou présents dans son dossier. Il ne s'agit pas de questions spécialisées d'experts, et encore moins de questions « pièges ». En particulier, pour des docteurs ayant soutenu leur thèse dans d'autres disciplines que les mathématiques, ces questions visent à mettre en relief les aspects mathématiques qui peuvent être en rapport avec leurs travaux de leur recherche. Le but est de tester la capacité à expliquer des points élémentaires des travaux de recherche et de discuter des possibilités de réinvestir les démarches utilisées ou les savoir-faire acquis dans un enseignement de niveau lycée, ou L1-L2.
- le jury peut proposer un exercice niveau lycée (ou L1 mais en restant dans des domaines très classiques) dans un domaine disjoint de celui de la thèse en demandant de le « faire vivre » dans une classe. Ces questions sortent les candidats de leur zone de confort en les faisant réflechir à des questions en lien avec le programme du secondaire qui ne sont pas reliées à leur domaine de recherche.
- enfin, le jury pose des questions plus ouvertes dont le thème général peut se résumer à évaluer l'apport d'une expérience dans la recherche pour un enseignant.

Le jury se réjouit de la qualité du signal perçu par cette épreuve, qui permet à des profils variés, y compris issus d'autres disciplines, d'exprimer des qualités et une motivation pour les carrières d'enseignants en mathématiques.

Annexe A

Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2019

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.