

Concours : AGRÉGATION INTERNE et CAERPA

Section : Mathématiques

Session 2018

Rapport de jury présenté par : Erick ROSER

Président du jury

Table des matières

1	Généralités et statistiques	3
1.1	Déroulement de la session 2018	3
1.2	Préparation des candidats	3
1.3	Historique des concours (nombre de postes, d'admissibles ...)	4
1.4	Statistiques	5
1.4.1	Répartition femmes-hommes	5
1.4.2	Répartition par âge	5
1.4.3	Répartition par profession	7
1.4.4	Répartition par académie	8
1.4.5	Répartition des notes d'écrit	10
1.4.6	Répartition des notes d'oral	12
2	Programme du concours pour la session 2019	14
3	Rapport sur les épreuves écrites	15
3.1	Première épreuve écrite	17
3.1.1	Présentation du sujet	17
3.1.2	Remarques générales	17
3.1.3	Statistiques de réussite	19
3.1.4	Commentaires par question	19
3.1.5	Éléments de correction	24
3.2	Seconde épreuve écrite	35
3.2.1	Présentation du sujet	35
3.2.2	Remarques générales	35
3.2.3	Statistiques de réussite	36
3.2.4	Commentaires par question	36
3.2.5	Éléments de correction	38
4	Rapport sur les épreuves orales	53
4.1	Considérations générales	54
4.1.1	Critères d'évaluation	54
4.1.2	Usage des moyens informatiques	55
4.2	L'épreuve orale d'exposé	56
4.2.1	Déroulement de l'épreuve	56
4.2.2	Choix des sujets	56
4.2.3	Plan	57
4.2.4	Développement	58
4.2.5	Niveau de la leçon	59
4.2.6	Questions du jury	59

4.3	L'épreuve orale d'exemples et exercices	60
4.3.1	Déroulement de l'épreuve	60
4.3.2	Choix des sujets	61
4.3.3	Présentation motivée des exercices ou exemples	61
4.3.4	Résolution détaillée d'un exercice ou d'un exemple	63
4.3.5	Questions du jury	64
5	Liste des sujets d'oral	65
6	Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques	71

Chapitre 1

Généralités et statistiques

1.1 Déroulement de la session 2018

Les épreuves écrites ont eu lieu les 25 et 26 janvier 2018, la liste d'admissibilité a été signée le 19 mars 2018 avec :

- agrégation interne : 330 admissibles ;
- CAERPA : 55 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 14 au 25 avril 2018, à l'université Paris Diderot-Paris 7, bâtiment Sophie Germain, à Paris 13ème.

La liste d'admission a été signée le 26 avril 2018 avec l'inscription de :

- agrégation interne : 155 admis ;
- CAERPA : 17 admis.

Tous les postes mis au concours de l'agrégation interne et du CAERPA ont été pourvus.

1.2 Préparation des candidats

La plupart des candidats admissibles aussi bien à l'agrégation interne qu'au CAERPA ont montré un niveau de préparation satisfaisant.

Nombreux sont ceux qui se préparent sur plusieurs années, ce qui est tout à fait raisonnable compte tenu du niveau d'exigence du concours et de la charge de travail que cela suppose. On observe ainsi que :

- 61 % des présents à la session 2018 avaient déjà participé aux épreuves écrites de la session 2017, soit 902 candidats ;
- 74 % des admissibles de la présente session étaient déjà candidats l'an dernier (présents à l'écrit), soit 286 candidats parmi lesquels 126 ont été admis ;
- sur les 385 admissibles de la session 2018, 137 avaient été admissibles à la session 2017 (parmi lesquels 69 ont été admis).

1.3 Historique des concours (nombre de postes, d'admissibles ...)

Agrégation interne

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1999	168	1690	1162	436	168
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107
2009	107	2124	1559	258	107
2010	114	2229	1426	267	114
2011	116	2442	1359	263	116
2012	125	2324	1589	281	125
2013	135	2266	1510	303	135
2014	130	2290	1495	302	130
2015	145	2317	1501	332	145
2016	148	2299	1510	333	148
2017	155	2248	1349	329	155
2018	155	2090	1280	330	155

CAERPA

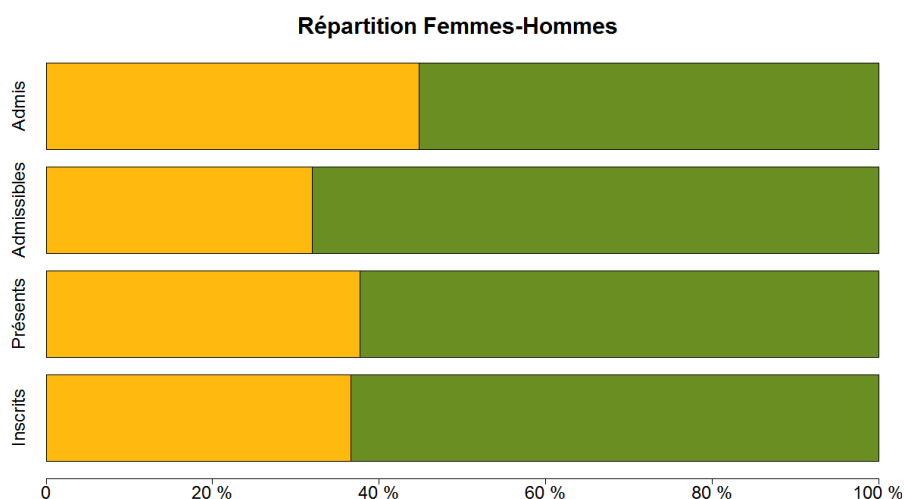
Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
1999	27	328	225	64	26
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11
2009	14	305	212	26	12
2010	12	346	207	17	8
2011	11	427	213	19	11
2012	13	350	228	29	13
2013	18	320	201	35	18
2014	19	317	217	32	14
2015	20	322	203	34	12
2016	13	335	214	35	13
2017	16	338	200	47	16
2018	17	353	205	55	17

1.4 Statistiques

1.4.1 Répartition femmes-hommes

Pour l'ensemble des deux concours, le pourcentage de femmes parmi les candidats présents à l'écrit est resté relativement stable (37,6%). On note également une stabilisation du pourcentage de femmes parmi les admissibles (31,9%) après une augmentation significative en 2017. En revanche, la proportion de femmes parmi les admis connaît cette année une très forte progression avec 44,8% de reçues contre 39,8% en 2017.

	Agrégation interne			CAERPA		
	Femmes	Hommes	Total	Femmes	Hommes	Total
Inscrits	742	1348	2090	153	200	353
Présents	469	811	1280	90	115	205
Admissibles	106	224	330	17	38	55
Admis	70	85	155	7	10	17



1.4.2 Répartition par âge

Pour l'ensemble des deux concours, l'âge moyen des candidats présents est de 41,4 ans (39,7 ans pour les femmes et 42,5 ans pour les hommes). Les admissibles ont sensiblement le même âge moyen, soit 41,5 ans (40,2 ans pour les femmes et 42 ans pour les hommes). Les admis en revanche sont d'un an plus jeunes, soit 40,5 ans (40 ans pour les femmes et 40,8 pour les hommes). Ainsi, conformément à leur vocation, les concours internes de l'agrégation s'adressent principalement à des professeurs confirmés dans leur carrière, comme l'attestent les diagrammes en boîte et tableaux suivants.

Ensemble des deux concours

Âge	moyen	minimum	1er quartile	médian	3e quartile	maximum
Inscrits	41.6	23.8	35.1	41.2	46.9	66.3
Hommes	42.8	25.5	36.5	42.6	48.5	66.3
Femmes	39.5	23.8	33.3	38.9	44.6	65.9
Présents	41.4	25.3	34.9	40.9	46.8	66.2
Hommes	42.5	27.3	36	42.4	48.4	66.2
Femmes	39.7	25.3	33.7	39	44.7	65.9
Admissibles	41.5	28.1	35.9	41.6	46	61.2
Hommes	42	28.1	36.4	42.1	46.5	61.2
Femmes	40.2	28.1	35.2	40.8	44.3	59.2
Admis	40.5	28.1	35.6	40.2	44.7	61.2
Hommes	40.8	28.1	35.6	40	45.2	61.2
Femmes	40	28.1	35.3	40.5	44.1	59.2

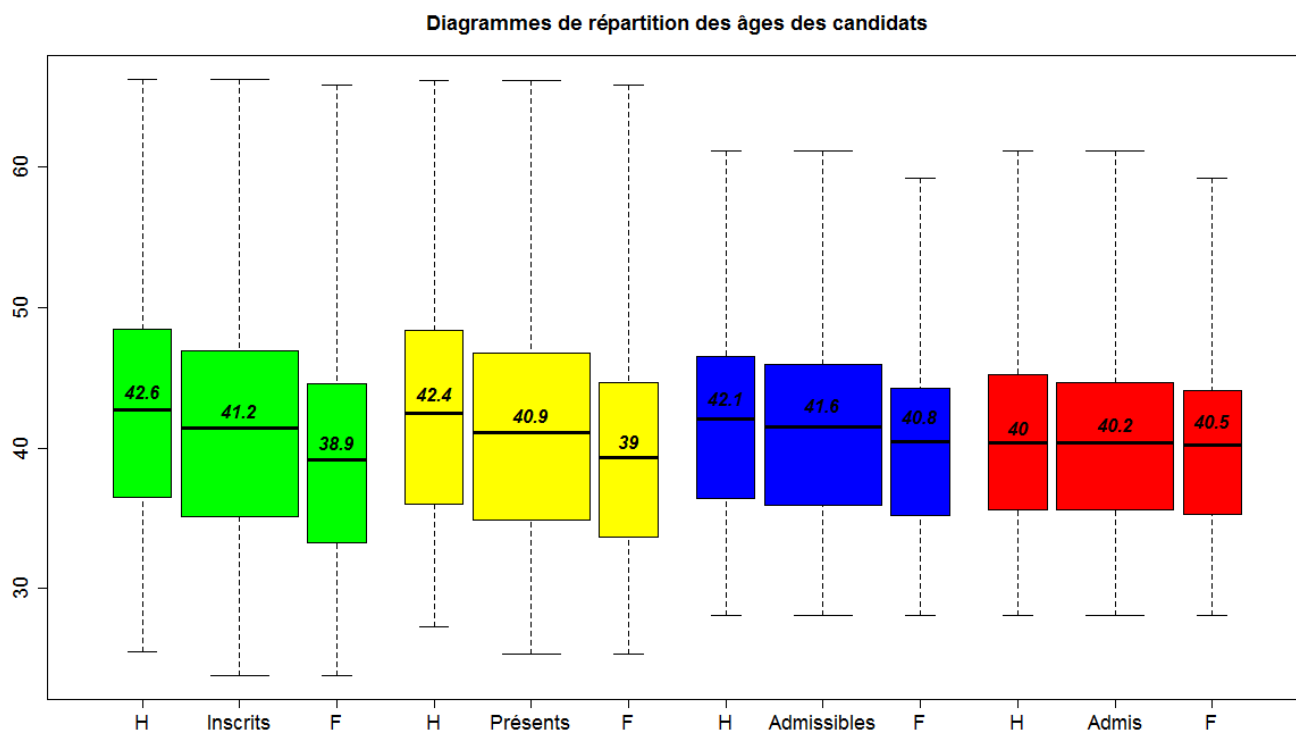


FIGURE 1.1 – Lecture graphique : L'âge minimum des femmes présentes au concours est de 25,3 ans ; 25% ont un âge inférieur ou égal à 33,7 ans, 50% ont 39 ans ou moins (médiane), 75 % ont 44,7 ans ou moins.

CAERPA

Tranches d'âge	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	18	6	2	0
Entre 30 et 35 ans	35	20	5	1
Entre 35 et 40 ans	61	34	5	2
Entre 40 et 45 ans	74	42	17	5
Entre 45 et 50 ans	78	48	13	7
Entre 50 et 55 ans	66	42	9	1
Supérieur à 55 ans	21	13	4	1
Total	353	205	55	17

Agrégation interne

Tranches d'âge	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	126	73	10	3
Entre 30 et 35 ans	212	127	30	11
Entre 35 et 40 ans	358	234	64	21
Entre 40 et 45 ans	461	262	86	46
Entre 45 et 50 ans	413	267	73	38
Entre 50 et 55 ans	398	249	58	32
Supérieur à 55 ans	122	68	9	4
Total	2090	1280	330	155

1.4.3 Répartition par profession

Ce sont essentiellement les professeurs certifiés qui sont reçus à l'agrégation interne (95% des admis, 94% des admissibles).

CAERPA

Professions	I	P	a	A
CONT ET AGREE REM INSTITUTEUR	13	5	0	0
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	26	5	0	0
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	314	195	55	17
Total	353	205	55	17

Agrégation interne

Professions	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AUTRES	34	11	0	
AUTRES ENS. TIT.	133	62	17	8
CERTIFIE	1830	1157	309	147
PLP	93	50	4	0
Total	2090	1280	330	155

1.4.4 Répartition par académie

CAERPA

Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	16	7	3	1
AMIENS	9	4	1	0
BESANÇON	5	4	1	1
BORDEAUX	12	6	4	2
CAEN	5	4	1	0
CLERMONT-FERRAND	8	4	0	0
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	73	37	18	5
DIJON	10	4	0	0
GRENOBLE	15	9	4	2
GUADELOUPE	2	1	0	0
LA RÉUNION	6	2	0	0
LILLE	30	26	5	1
LIMOGES	2	0	0	0
LYON	23	18	6	3
MARTINIQUE	5	2	0	0
MONTPELLIER	9	2	0	0
NANCY-METZ	8	7	0	0
NANTES	21	11	1	0
NICE	8	3	0	0
NOUVELLE CALÉDONIE	1	1	0	0
ORLÉANS-TOURS	5	2	0	0
POITIERS	8	6	0	0
POLYNÉSIE FRANÇAISE	8	3	0	0
REIMS	3	2	0	0
RENNES	23	18	4	2
ROUEN	10	7	3	0
STRASBOURG	9	3	1	0
TOULOUSE	19	12	3	0
Total	353	205	55	17

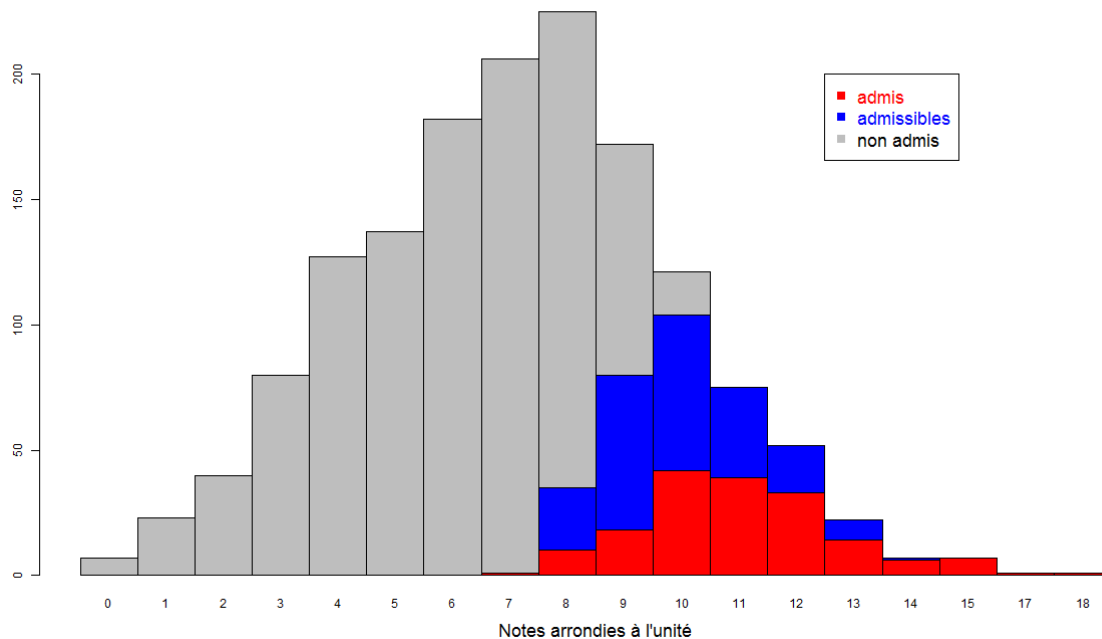
Agrégation interne

Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	111	64	27	15
AMIENS	57	34	5	2
BESANÇON	28	23	7	4
BORDEAUX	75	45	7	3
CAEN	31	22	7	1
CLERMONT-FERRAND	30	24	10	6
CORSE	14	10	3	0
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	454	281	67	31
DIJON	37	21	8	4
GRENOBLE	96	56	13	7
GUADELOUPE	42	24	4	2
GUYANE	16	6	2	1
LA RÉUNION	63	26	8	1
LILLE	121	82	18	13
LIMOGES	20	12	1	0
LYON	100	68	18	10
MARTINIQUE	31	16	5	2
MAYOTTE	20	12	2	1
MONTPELLIER	91	49	17	11
NANCY-METZ	68	52	13	9
NANTES	68	41	8	4
NICE	89	49	10	3
NOUVELLE CALÉDONIE	10	4	1	0
ORLÉANS-TOURS	75	45	11	2
POITIERS	43	22	8	3
POLYNÉSIE FRANÇAISE	11	5	0	0
REIMS	35	19	3	2
RENNES	65	40	10	4
ROUEN	52	38	11	6
STRASBOURG	56	35	10	3
TOULOUSE	81	55	16	5
Total	2090	1280	330	155

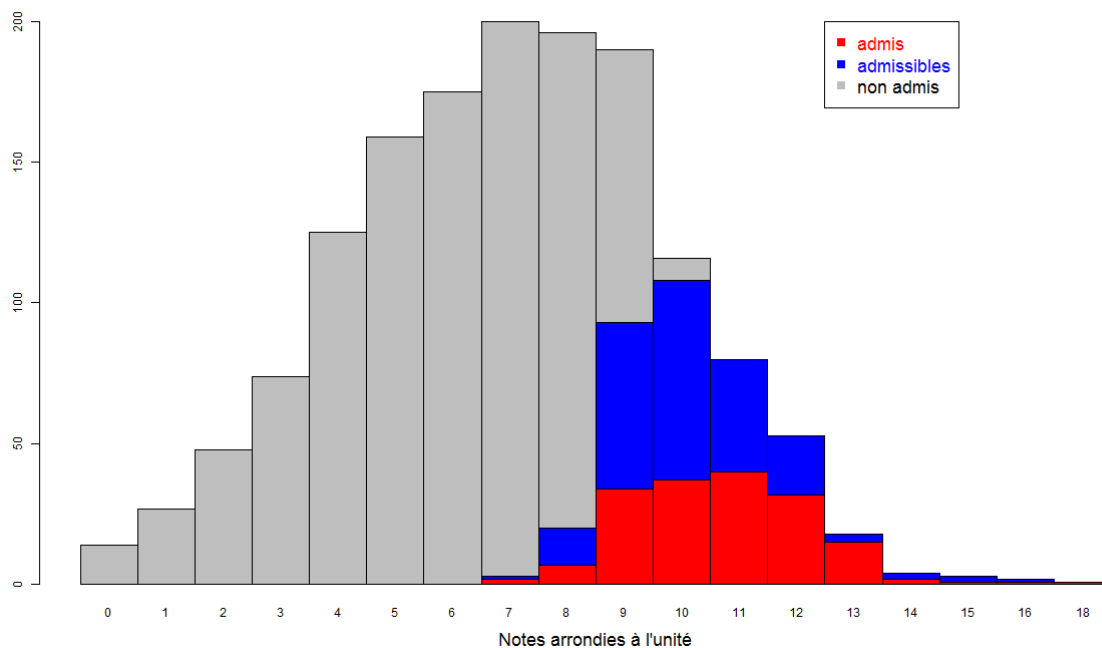
1.4.5 Répartition des notes d'écrit

La barre d'admissibilité a été fixée à 89 points sur 200 (identique pour les deux concours). Le nombre d'admissibles au CAERPA a été proportionnellement plus élevé (si on le rapporte au nombre de postes offerts).

Histogramme des notes attribuées à l'épreuve 1

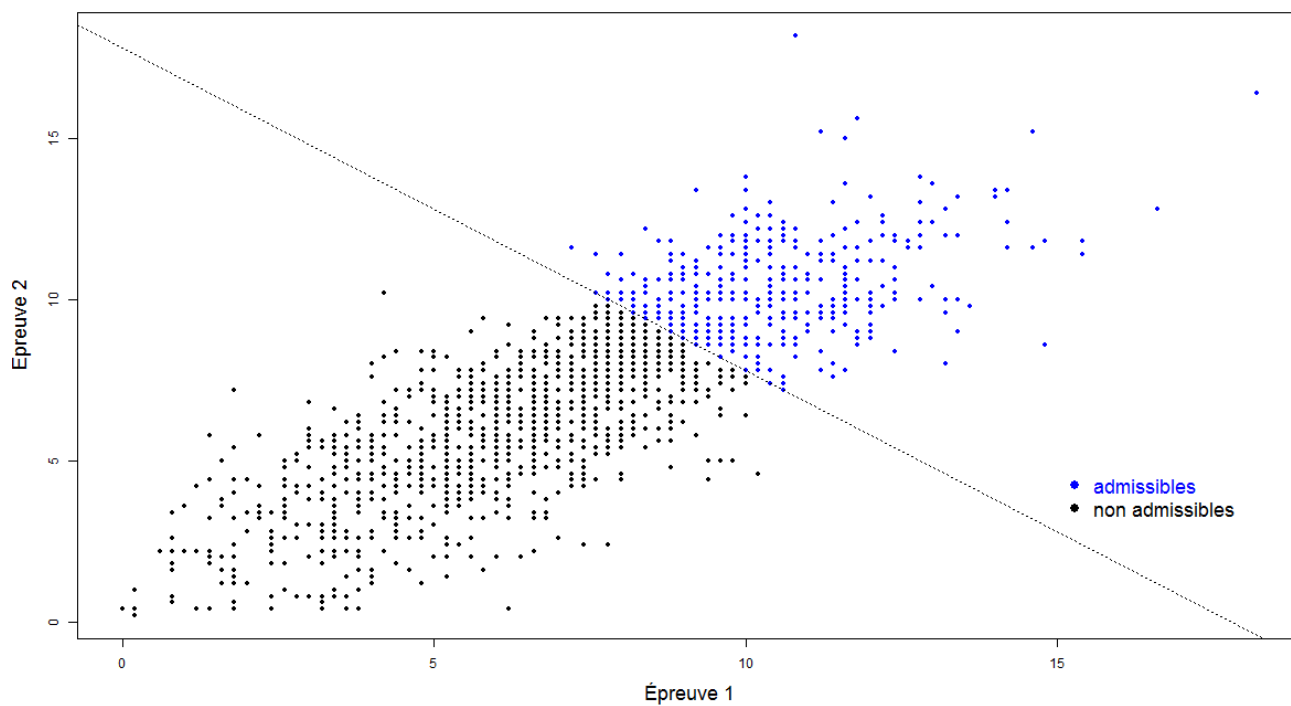


Histogrammes des notes attribuées à l'épreuve 2



Nuage des notes d'écrit

Chaque candidat présent à l'écrit est repéré par le couple des notes qu'il a obtenues respectivement aux épreuves 1 et 2. Le coefficient de corrélation entre les deux épreuves est de 0,82.

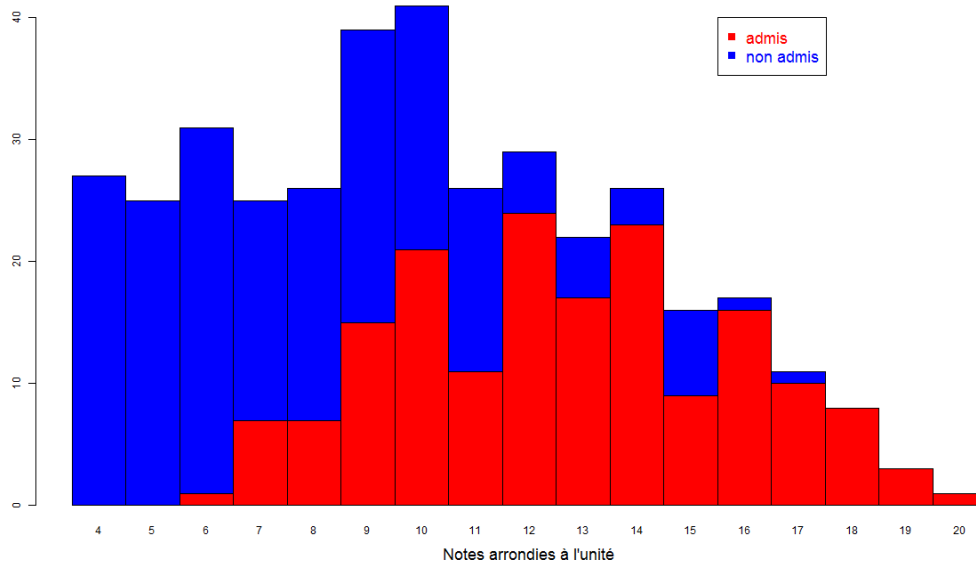


1.4.6 Répartition des notes d'oral

La barre d'admission (c'est-à-dire le total des points du dernier admis) a été cette année de 204 points pour le concours de l'agrégation interne et de 234 points pour le CAERPA.

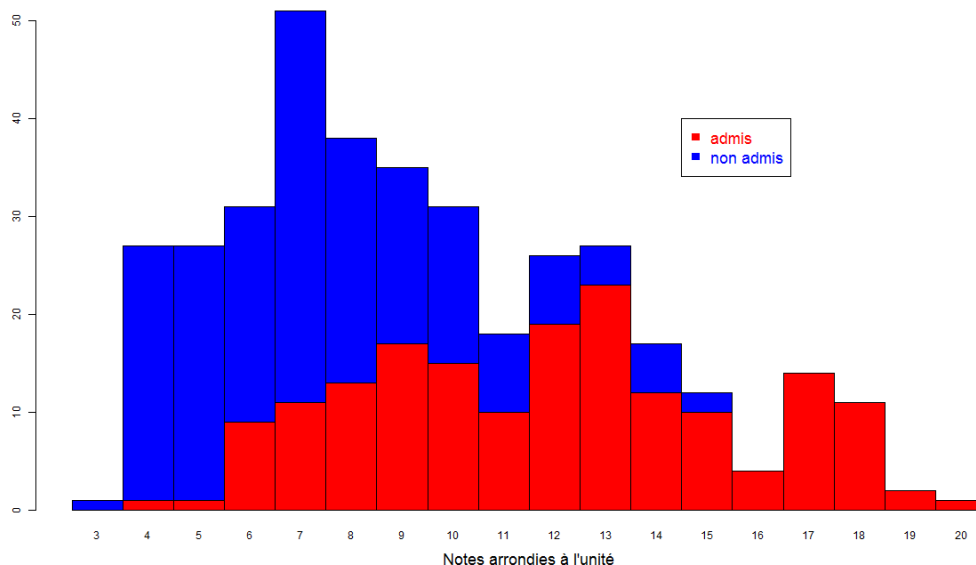
Histogramme des notes attribuées à l'épreuve d'exposé

La moyenne des notes vaut 10,1 et la médiane est égale à 9,8.



Histogrammes des notes attribuées à l'épreuve d'exemples et exercices

La moyenne des notes vaut 9,5 et la médiane est égale à 8,8.



Nuage des notes d'écrit et d'oral

Le graphique ci-dessous, dans lequel chaque candidat présent à l'oral est repéré par le couple des totaux obtenus respectivement à l'écrit et à l'oral (sommes respectives des notes sur 100 obtenues aux deux épreuves écrites et aux deux épreuves orales), souligne toute l'importance qui s'attache à une solide préparation de l'oral. On observe ainsi que certains candidats avec un bon niveau à l'écrit ne sont pas admis et qu'*a contrario* des candidats proches de la barre d'admissibilité à l'écrit sont reçus, parfois dans un bon rang, grâce à une très bonne prestation orale.

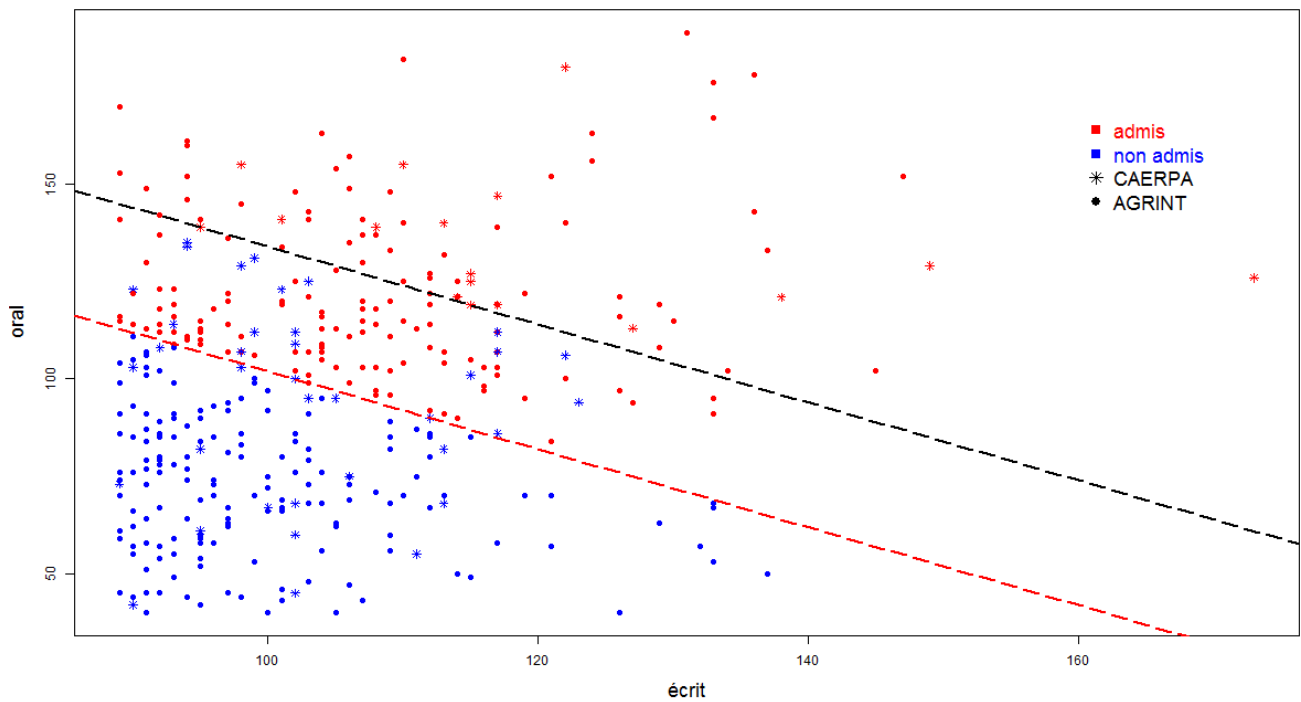


FIGURE 1.2 – Les droites en pointillés représentent les barres respectives de 204 (en rouge) et de 234 (en noir) correspondant aux deux concours.

Chapitre 2

Programme du concours pour la session 2019

Le programme du concours pour la session **2019** est publié sur le site du ministère de l'Éducation nationale à l'adresse suivante :

<http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid100820/les-programmes-des-concours-enseignants-second-degre-session-2019.html>

Mises à part des modifications de détail¹ la principale évolution du programme concerne les statistiques (*cf.* §13.6 *in fine*).

Comme annoncé dans le rapport de jury de la session 2017, il a en effet été ajouté un paragraphe sur l'estimation ponctuelle et par intervalle de confiance. Outre que ces notions figurent déjà dans les programmes des classes préparatoires aux grandes écoles, filière économique et commerciale (ECE et ECS) et voie biologie, chimie, physique et sciences de la Terre (BCPST), il est nécessaire que les professeurs maîtrisent les fondements théoriques des concepts qu'ils enseignent, ce qui est notamment le cas des statistiques qui ont pris de l'importance dans les programmes de lycée.

1. Une version du programme 2019 avec mise en évidence surlignée des modifications est disponible à l'adresse suivante : http://agrint.agreg.org/prog2019_surligne.pdf

Chapitre 3

Rapport sur les épreuves écrites

L'arrêté définissant le concours dispose que les épreuves écrites « ont pour objectif d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques et la capacité de les mobiliser pour étudier des situations, ainsi que la solidité, sur le plan scientifique, des acquis professionnels ».

Aussi, une bonne connaissance d'un minimum d'outils théoriques est-elle indispensable à la réussite de ces épreuves, ce qui suppose un travail de préparation visant la maîtrise des théorèmes fondamentaux et un entraînement à la résolution de problèmes afin d'acquérir de bons réflexes intellectuels.

Les correcteurs sont particulièrement attentifs à la clarté des raisonnements et à la précision des justifications. Lorsqu'un résultat est utilisé (théorème, propriété, etc.), il est important d'énoncer clairement les hypothèses à vérifier et la conclusion désirée. Ceci est d'autant plus vrai lorsque le candidat n'arrive pas à vérifier lesdites hypothèses car le correcteur peut au moins valoriser ses connaissances et sa capacité à reconnaître une situation. De manière générale, il est indispensable de justifier l'existence des objets mathématiques avant de les manipuler, comme par exemple les intégrales, les sommes de séries, les limites...

Il est attendu dans la rédaction les qualités exigibles d'un professeur de mathématiques, à savoir :

- la rigueur de l'argumentation. Par exemple, choisir de façon pertinente les articles utilisés (singulier ou pluriel, défini ou indéfini) ; identifier clairement le théorème invoqué ou le résultat d'une question précédente utilisé (des arguments comme « d'après le cours » ou « vu ce qui précède » sont trop vagues pour être suffisants) et en vérifier les hypothèses ; ne pas confondre une inégalité stricte avec une inégalité large, une inclusion avec une égalité, une bijection avec une injection, etc. ; vérifier, avant d'inverser un nombre ou une matrice, que cela est possible ;
- la maîtrise des techniques usuelles de démonstration : raisonnement par équivalence, raisonnement par analyse-synthèse, démonstration par récurrence, par l'absurde, par contraposée etc. ;
- la clarté de l'expression, la lisibilité de la présentation ainsi qu'une certaine attention à l'orthographe.

Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

Le jury regrette unanimement un manque de rigueur et de logique dans les raisonnements qui prend des proportions inquiétantes : confusions entre implication et équivalence, condition nécessaire et condition suffisante (confusion entre « il faut » et « il suffit »), quantificateurs erronés ou absents,

connaissance très approximative des définitions (limites, continuité, sup, inf etc.) et des théorèmes. Toutes ces insuffisances sont sévèrement sanctionnées tant il est essentiel qu'un professeur de mathématiques maîtrise ces fondamentaux pour dispenser un enseignement de qualité. Le jury tient à appeler l'attention des candidats sur la nécessité de fournir un travail important dans ce sens.

3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :

http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_interne/21/3/s2018_agreg_interne_math_1_887213.pdf

3.1.1 Présentation du sujet

L'objectif principal est l'établissement de l'assertion :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{bmatrix} \right) \in \mathbf{R}_+.$$

La partie I permet d'établir quelques résultats élémentaires utiles pour la suite du problème. On reformule également le problème initial en montrant qu'il est équivalent à un problème plus simple en apparence. Dans la partie II, on établit le résultat dans un cas particulier. La partie III introduit le résultant de deux polynômes ainsi que le discriminant d'un polynôme, et établit quelques propriétés élémentaires sur le résultant, ainsi que le fait que le discriminant permet de caractériser les polynômes complexes scindés à racines simples. La partie IV, plus difficile, établit certaines propriétés des polynômes à plusieurs indéterminées et démontre l'assertion souhaitée à l'aide d'arguments de densité et de continuité. La partie V propose une autre manière d'introduire le résultant (à un coefficient multiplicatif non nul près) comme déterminant d'un certain endomorphisme, ce qui donne l'occasion de manipuler les espaces vectoriels quotients. Le sujet propose enfin une démonstration directe purement algébrique de l'assertion à établir.

3.1.2 Remarques générales

Le sujet couvre une large partie du programme d'algèbre et de topologie. Sa longueur est relativement raisonnable (notons que la meilleure copie a répondu à presque toutes les questions) et sa difficulté très progressive. Les questions de la partie I ont été traitées par la très grande majorité des candidats. Certaines questions, pourtant très abordables avec les connaissances du programme, se sont avérées très discriminantes. Le jury constate que beaucoup de candidats maîtrisent mal la logique et plus particulièrement la manipulation et la compréhension des assertions mathématiques quantifiées. Ces compétences sont pourtant essentielles à la pratique des mathématiques.

Quelques écueils à éviter et fréquemment rencontrés dans les copies :

- il convient de clairement répondre à la question posée, ce qui n'est pas toujours évident à la lecture de certaines réponses des candidats ;
- il ne faut pas ignorer la présence des quantificateurs dans les assertions à montrer ;
- on ne peut pas se contenter d'affirmer un résultat sans justification ;
- beaucoup de raisonnements par récurrence ne sont pas rédigés correctement, en particulier l'hérédité qui, rappelons-le, consiste à montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$;
- le symbole $\Rightarrow$ n'est pas une abréviation de « donc » ;

- le symbole $\Longleftrightarrow$ est souvent utilisé de manière abusive et mal compris. $P \Longleftrightarrow Q$ n'implique pas que P est vraie ou que Q est vraie ;
- beaucoup de confusions sur la nature des objets : un polynôme n'est pas une équation (à ce propos, signalons que l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbf{C}$, ne caractérise pas le polynôme P) ; une fonction n'est pas un nombre ; une matrice n'a pas de matrice dans une base ; dans $\mathbf{K}[X]$, X est un polynôme (on ne peut donc par exemple pas « poser $X = 1$ ») ; parler de la dimension d'une famille de vecteurs est incorrect, etc. ;
- il ne faut pas manipuler des objets comme l'inverse d'une matrice, la limite d'une suite, ... sans avoir préalablement justifié leur existence ;
- il faut être précis dans les justifications. Par exemple, il est insuffisant d'écrire : « f est injective et on est en dimension finie, donc f est bijective » si l'on ne signale pas que f est un endomorphisme ou que les dimensions de l'espace vectoriel de départ et d'arrivée sont égales ;
- un polynôme réel n'a pas nécessairement ses racines dans $\mathbf{R}$, même s'il est scindé à racines simples dans $\mathbf{C}$, comme le montre l'exemple de $X^2 + 1$;
- attention au fait qu'une matrice diagonalisable n'est pas « égale à une matrice diagonale dans une certaine base » mais *a priori* seulement semblable à une telle matrice diagonale ;
- beaucoup de candidats vérifient inutilement que l'image du vecteur nul est nul pour prouver qu'une application est linéaire ;
- on constate, dans beaucoup de copies, un certain flou au niveau des inégalités : les inégalités larges et strictes sont utilisées indifféremment ; certaines copies affirment que $\lambda > 0$ est équivalent à $\lambda \in \mathbf{R}_+$, que la simple croissance d'une fonction suffit à maintenir des inégalités strictes, etc. ;
- $a \neq b \neq c$ n'a pas de sens, puisque $\neq$ n'est pas une relation transitive ;
- il n'est pas absurde, pour un polynôme, de s'annuler une infinité de fois, sauf à préciser que ce polynôme n'est pas nul ;
- la malhonnêteté manifeste de certaines démonstrations est inacceptable de la part d'enseignants et est sévèrement sanctionnée par les correcteurs ;
- il est inadmissible que certaines copies soient très difficiles à lire du fait d'une présentation négligée ou d'une écriture illisible.

Conseils

- Penser à introduire les variables pour démontrer une formule quantifiée universellement (par exemple pour la linéarité d'une application).
- Lorsqu'il s'agit de démontrer une équivalence, énoncer clairement ce qui est supposé et ne pas oublier de conclure. Le correcteur ne doit pas avoir à se poser de questions sur l'hypothèse de départ.
- Se contenter de dire qu'une propriété est évidente, immédiate ou triviale en début d'épreuve ne rapporte aucun point. L'épreuve n'est pas une course de vitesse ; chaque question traitée doit l'être avec soin.
- Bien mettre des connecteurs logiques entre les lignes de calcul.
- Éviter de mélanger les phrases en français et les symboles mathématiques, ces derniers ne devant pas servir d'abréviation.
- Il est inutile de copier l'énoncé de chaque question.
- Il est en revanche très utile de bien le lire (par exemple, dans la question 15, le polynôme P est supposé de degré 2, pas dans la question 16 ; ou encore, la question 8 fait *l'hypothèse* que la valeur propre λ est réelle).
- Les candidats devraient prêter davantage attention à la précision du vocabulaire employé : les polynômes caractéristiques ne sont pas diagonalisables, les matrices n'ont pas de solutions, une

suite de matrices n'est pas un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ mais de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, les polynômes n'ont pas de solutions, le degré d'un couple de polynômes n'a pas de sens, la dimension d'un polynôme non plus, antécédent et image réciproque ne sont pas synonymes, etc.

- Écrire des phrases mathématiques ne dispense pas d'une orthographe correcte : « je choisis », « j'admet », « j'en déduit », « on conclut que » sont très mal venus dans une copie d'agrégation.

3.1.3 Statistiques de réussite

Dans l'ensemble les candidats admissibles ont traité les trois premières parties, certains ayant rebondi sur la partie VI qui était indépendante. Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions (chaque barre correspond à un item de correction).

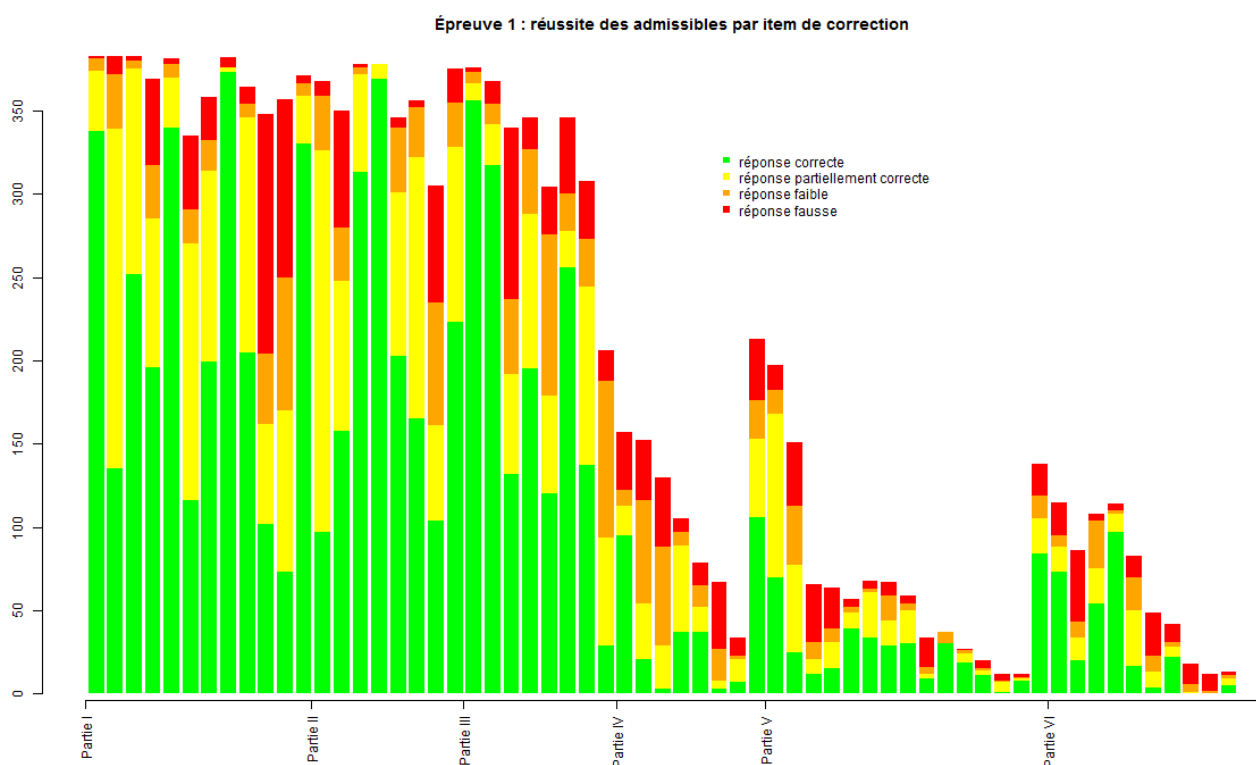


FIGURE 3.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.1.4 Commentaires par question

PARTIE I

1. Cette question a été globalement correctement traitée. Toutefois, certains candidats pensent que $\forall z \in \mathbf{C}, |z| > 0$.
2. (a) De nombreux candidats ignorent comment s'exprime le produit d'une matrice par un vecteur. Il est inutile de redémontrer que la somme (ou le produit) des conjugués de deux nombres complexes est le conjugué de la somme (ou du produit).

- (b) Les réponses sont souvent partielles. En particulier, les candidats doivent faire la différence entre la structure d'espace vectoriel et celle d'algèbre. De nombreux candidats oublient de montrer que l'image de I_n est bien I_n . Très peu pensent à utiliser que toute involution est bijective et montrent la bijectivité en montrant l'injectivité et la surjectivité, ce qui leur fait perdre du temps. Certains candidats ne savent pas ce qu'est un automorphisme et interprètent ce mot comme suit : « L'application $f : \dots$ est bien un automorphisme, c'est-à-dire un morphisme de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même. »
- (c) Beaucoup de candidats ignorent la définition du déterminant sous la forme de : $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$, ce qui rend la question difficile. Une démonstration par récurrence à l'aide d'un développement par ligne/colonne est acceptable si le développement est correctement écrit (en tenant compte du fait qu'un cofacteur n'est pas un mineur). Cependant cette méthode était bien plus longue que l'utilisation directe de la formule du déterminant. À propos de la récurrence, certains candidats commencent par $n = 2$ alors que $n = 1$ est si simple.
- (d) Certains candidats confondent inégalités larges et strictes.
3. (a) Certains candidats pensent qu'une matrice non nulle a nécessairement une valeur propre non nulle et oublient de traiter le cas des matrices nilpotentes, pour lesquelles : $\min\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}\}$ n'existe pas. Par ailleurs, on constate que certains candidats, voulant raisonner par l'absurde, ne savent pas écrire la négation de la propriété demandée.
- (b) Beaucoup de candidats ignorent la définition d'une partie dense d'un espace vectoriel normé.
La plupart omettent de parler de norme. Rappeler, dans cette question qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes était attendu.
4. (a) Quelques candidats oublient que le produit matriciel n'est pas commutatif.
- (b) Peu de candidats pensent à justifier que $\overline{A}$ est inversible et à dire ce que vaut son inverse.
Nous rappelons que, si $n \geq 2$, la propriété :
 $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ est fausse, tout comme les assertions :

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^4, \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det(A) \det(D) - \det(C) \det(B)$$

et

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^4, \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) = \det(AD - BC)$$

5. On voit ici les difficultés que rencontrent les candidats avec la logique. L'équivalence entre ces deux formules quantifiées universellement est très mal gérée, par défaut de compréhension ou de maîtrise des quantificateurs.

L'utilisation de la question précédente n'est pas claire, beaucoup de candidats ont tendance à supposer que toutes les matrices sont inversibles. Des passages à la limite non justifiés (notamment l'existence de la limite) donnent des résultats incohérents (si $(A_p)_{(p \in \mathbf{N})}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers A non inversible, quelle est la limite de $(A_p^{-1})_{(p \in \mathbf{N})}$) ?

Le raisonnement de l'implication directe et celui de la réciproque sont de nature différente, et il est de ce fait maladroit de chercher à résoudre cette question par équivalence.

PARTIE II

6. (a) Certains candidats pensent qu'avoir les mêmes valeurs propres est suffisant pour que deux matrices soient semblables (prendre le cas d'une matrice nilpotent $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non nulle et la matrice nulle pour voir que cela est faux).
Attention, le déterminant n'est pas une application linéaire.
- (b) Peu de démonstrations soignées sur le fait que l'application qui, à une matrice, associe son polynôme caractéristique est continue. Il est nécessaire de donner un argument pour justifier la continuité du déterminant. Par ailleurs, il convient d'être attentif à l'espace d'arrivée, car si on prend $\mathbf{C}[X]$, le résultat dépend *a priori* du choix de la norme (on n'est pas en dimension finie). Il convient de faire attention à la nature des objets : un polynôme n'est pas un nombre complexe.
- (c) Si pour toute racine a d'un polynôme complexe P , $\bar{a}$ est racine de P , ce n'est pas suffisant pour dire que P est un polynôme réel (prendre par exemple $P = (X^2 + 1)(X - i)$). Il faut préciser que les racines sont de même multiplicité et ne pas oublier le coefficient dominant. Par ailleurs, si on montre que $\forall x \in \mathbf{R}, P(x) = \overline{P(x)}$, il faut bien préciser que ces deux polynômes coïncident sur un ensemble infini pour conclure que $P = \bar{P}$.
Il existe des polynômes complexes pour lesquels $\bar{\lambda}$ n'est pas racine, même si λ l'est.
7. Le fait qu'une matrice donnée soit diagonalisable ne dépend pas du choix d'une base.
Pour justifier que $C\bar{C}$ est diagonalisable, de nombreux candidats rajoutent à l'argument « polynôme caractéristique scindé » l'argument « polynôme caractéristique réel ».
Le fait que le polynôme caractéristique soit scindé à racines simples n'est pas une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.
8. (a) Question généralement bien traitée.
- (b) Les candidats confondent très souvent vecteur propre et vecteur appartenant au sous-espace propre (il ne faut pas oublier de signaler que $v \neq 0$).
Pour la majorité des candidats, la colinéarité de deux vecteurs u et v équivaut au fait qu'il existe un scalaire λ vérifiant $v = \lambda u$, ce qui est faux (prendre par exemple $u = 0$ et $v \neq 0$).
Par ailleurs, pour pouvoir affirmer que : si $C\bar{v}$ et v sont des vecteurs propres de $C\bar{C}$ associés à la valeur propre λ alors ces deux vecteurs sont colinéaires, il faut préciser que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est de dimension un. Ne parler de vecteur propre que si on s'est assuré que le vecteur est non nul.
9. Attention à la logique. Les questions précédentes montrent que les valeurs propres réelles sont positives. Il est tout à fait possible d'avoir des valeurs propres complexes.
Par ailleurs, pour dire que si λ est valeur propre de $C\bar{C}$ alors $\bar{\lambda}$ l'est aussi, il faut rappeler que le polynôme caractéristique est réel.

PARTIE III

10. Cette question est souvent mal traitée parce que beaucoup de candidats ignorent la définition des lois sur un espace vectoriel produit.
Les candidats se contentant de dire que « $\mathcal{B}$ est clairement libre et génératrice » n'ont pas obtenu de points.
11. Beaucoup de candidats utilisent les notations peu judicieuses P et P' pour désigner deux polynômes quelconques (penser que P' désigne souvent la dérivée formelle de P).
Pour montrer que φ est une application linéaire, il n'est pas nécessaire de montrer que $\varphi(0) = 0$, cela découle de la définition d'une application linéaire.

12. Question généralement bien traitée, même si beaucoup de candidats ne connaissent pas la définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases. Attention cependant à ne pas mettre des polynômes comme coefficients matriciels.
13. (a) Dans l'utilisation du théorème de Bézout, certains évoquent l'unicité de (U, V) tel que $PU + QV = 1$, lorsque P et Q sont premiers entre eux. Ce dernier théorème n'assure que l'existence de U et V , il n'y a pas unicité sauf à ajouter une condition sur les degrés.
Les candidats se contentant de dire que $PU + QV = 0$ implique $U = V = 0$ car P et Q sont premiers entre eux n'ont pas obtenu de points.
- (b) Les candidats affirmant que φ est injective donc bijective car la dimension est finie n'ont pas obtenu la totalité des points. Il fallait bien préciser que les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée de φ étaient les mêmes.
14. Certains candidats ont bien démarré la résolution de la question en évoquant que si $D = \text{PGCD}(P, Q)$, alors il existe P_1 et Q_1 tels que $P = P_1 D$, $Q = Q_1 D$ et $\varphi(-Q_1, P_1) = 0$, mais il fallait vérifier (en examinant le degré) que $(-Q_1, P_1)$ était bien dans l'ensemble de définition de φ .
Des candidats pensent répondre à la question en se contentant d'exhiber une valeur particulière du couple (P, Q) pour laquelle l'application n'est pas injective.
On a souvent trouvé citée l'assertion fautive suivante : si P et Q ne sont pas premiers entre eux alors l'un est multiple de l'autre.
15. Lors du calcul explicite d'un déterminant, il est nécessaire d'indiquer les opérations effectuées. Beaucoup de candidats se trompent sur la matrice de Sylvester, soit au niveau de la taille, soit au niveau de l'ordre des coefficients.
16. Il a été rarement démontré que P et P' sont premiers entre eux si et seulement si P et P' n'ont pas de racine commune en mentionnant le fait que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

PARTIE IV

17. (a) C'est une question classique.
On rappelle que le polynôme nul a effectivement une infinité de racines.
Beaucoup de candidats ont bien établi l'initialisation, mais l'hérédité est moins bien traitée car les démonstrations sont trop vagues. Isoler la dernière variable x_d en écrivant
- $$\sum_{k=0}^r \left(\sum_{k_1, \dots, k_{d-1}} a(k_1, \dots, k_{d-1}, k) x_1^{k_1} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}} \right) x_d^k = 0 \text{ pour tout } (x_1, \dots, x_d) \in I_1 \times \dots \times I_d$$
- n'est pas suffisant pour dire que tous les $a(k_1, \dots, k_{d-1}, k) x_1^{k_1} \dots x_{d-1}^{k_{d-1}}$ sont nuls.
Un nombre non négligeable de candidats considèrent, dans l'initialisation, qu'un polynôme d'une variable est nécessairement un monôme.
- (b) Question rarement traitée.
18. Question difficile très rarement abordée. Attention cependant à bien noter que les coefficients de l'application $C \mapsto C\bar{C}$ ne sont pas polynomiaux en les coefficients de C , car la conjugaison n'est pas une application polynomiale. Pour avoir un polynôme, on pouvait considérer cette application comme polynomiale sur les parties réelles et imaginaires des coefficients de C .
19. Question bien traitée par la majorité des candidats l'ayant abordée.
20. (a) Question bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
(b) Question très rarement abordée.
(c) Question très rarement abordée.

PARTIE V

- 21.** Ne pas oublier d'évoquer le degré du reste pour avoir l'unicité de la division euclidienne .
Le degré de la somme de polynômes est rarement clairement exprimé.
Beaucoup de candidats ont bien montré que rem_D est un projecteur mais, de façon assez surprenante, n'ont pas réussi à en donner les éléments caractéristiques.
Une réponse du type « quo_D et rem_D sont clairement des endomorphismes » ne rapporte aucun point.
- 22.** Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas les structures quotients et pensent en particulier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
Attention, on ne peut pas dire que $(\overline{1}, \dots, \overline{X^{r-1}})$ est échelonnée en degré. Ceci n'a pas de sens puisque l'on travaille sur des classes d'équivalence.
- 23.** (a) Pour montrer que f est surjective, on ne peut pas se contenter de trouver $\overline{U}$ tel que $f(\overline{U}) = 1$.
(b) Question généralement bien traitée par les candidats l'ayant abordée.
- 24.** (a) Le calcul du degré de $Q \times \text{quo}_Q(S)$ est souvent trop rapide.
(b) Répondre $\tilde{f}(U + QV) = \tilde{f}(U) + QV$ n'est pas suffisant.
(c) Question assez rarement traitée correctement alors qu'il suffisait de remarquer que $\mathcal{B}_1$ est échelonnée en degré.
(d) Question très rarement abordée.
- 25.** (a) Répondre $\xi(U + X^r V) = \xi(U) + QV$ n'est pas suffisant.
(b) Question généralement bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. Attention à ne pas mettre de polynômes dans la matrice.
(c) Question très rarement abordée.
(d) Question très rarement abordée.
- 26.** Question très rarement abordée.

PARTIE VI

- 27.** (a) Beaucoup de candidats affirment que « deux matrices de même déterminant sont semblables ».
Attention, une matrice de passage convenable est $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et non $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: les matrices de l'énoncé sont des matrices par blocs de taille n .
(b) Remarque analogue à la question précédente.
- 28.** On constate beaucoup d'erreurs dans le calcul du déterminant d'une matrice décomposée en 4 blocs et (plus rarement) avec l'assertion $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $\det(AB) = \det(BA)$ qui devient : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$.
- 29.** (a) Question assez bien traitée par les candidats l'ayant abordée.
(b) Ne pas confondre $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\text{Id}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n}$.
(c) Attention au fait que θ n'est pas $\mathbf{C}$ -linéaire. Par ailleurs, contrairement à ce qu'on peut lire dans certaines copies, il existe des nombres complexes non nuls a et b tels que $a^2 + b^2 = 0$.
(d) Question très peu abordée.

- 30. (a)** Beaucoup de confusions, déjà notées les années précédentes, entre espace propre et espace caractéristique. La notion de sous-espace caractéristique est toujours aussi mal maîtrisée.
- (b)** Question très peu abordée.
- 31.** Quelques rares candidats ont abordé cette question avec succès.

3.1.5 Éléments de correction

Cette section a pour objet de proposer aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Ces éléments de correction ne préfigurent pas les attentes du jury en matière de rédaction. Les candidats sont invités pour cela à se référer aux conseils donnés dans les sections précédentes et dans les rapports de jury antérieurs.

Partie I

On fixe deux matrices A et B , éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. $\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \in \mathbb{R}_+$

2. a) Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $v = (v_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$.

$$\overline{Av} = \overline{\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} v_k \right)_{1 \leq i \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k} v_k} \right)_{1 \leq i \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}} \overline{v_k} \right)_{1 \leq i \leq n} = \overline{A} \overline{v}$$

b) Notons φ l'application de l'énoncé.

▷ $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, donc φ est involutive et bijective.

▷ $\varphi(I_n) = I_n$.

▷ Soient $(A, B) = \left((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors, $\varphi(\lambda A + \mu B) = \overline{(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}} =_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2} (\lambda \overline{a_{i,j}} + \mu \overline{b_{i,j}})_{1 \leq i,j \leq n} = \lambda \varphi(A) + \mu \varphi(B)$.

▷ Soit $(A, B) = \left((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

$$\varphi(AB) = \overline{\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}} \overline{b_{k,j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \varphi(A) \varphi(B)$$

c) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\overline{\det(A)} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n \overline{a_{\sigma(j),j}} = \det(\overline{A})$$

d) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors, $\det(A) \neq 0$. Ainsi,

$$\det(A\overline{A}) = \det(A) \det(\overline{A}) = \det(A) \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 > 0$$

3. a) Il suffit de choisir $\eta := \min_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} |\lambda|$ où $\text{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A si A admet au moins une valeur propre non nulle et $\eta := 2018$ sinon.

b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\eta > 0$ donné par la question (a). Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On choisit la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|A\| := \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

On fixe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k_0} < \eta$ (possible car $\frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$). Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\| \left(A - \frac{1}{k_0 + k} I_n \right) - A \right\| = \left\| -\frac{1}{k_0 + k} I_n \right\| = \frac{1}{k_0 + k} \quad \text{et} \quad A - \frac{1}{k_0 + k} I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

Donc,

$$\left\| \left(A - \frac{1}{k_0 + k} I_n \right) - A \right\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi, $\left(A - \frac{1}{k_0 + k} I_n \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers A .

4. a)

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}$$

b) $\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{pmatrix} = 1$, et $\overline{A} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ puisque $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{pmatrix} = \det(A) \det(\overline{B}A^{-1}B + \overline{A}) \\ &= \det(A) \det \left(\overline{A} \left(\overline{A}^{-1} \overline{B}A^{-1}B + I_n \right) \right) \\ &= |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) \end{aligned}$$

où on a posé $C := \overline{A}^{-1}\overline{B}$.

5. (1) $\implies$ (2) Supposons (1) vraie. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (il est important d'introduire C en premier pour s'assurer que C est quelconque)

Posons $A := I_n$ et $B := \overline{C}$. Alors, A est inversible et $C = \overline{A}^{-1}\overline{B}$. Donc, d'après 4.b,

$$\det(I_n + C\overline{C}) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) = \det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+$$

d'après l'hypothèse.

(2) $\implies$ (1) Supposons (2) vraie. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On conserve la norme choisie précédemment.

▷ Supposons d'abord A inversible. Alors, en posant $C := \overline{A}^{-1}\overline{B}$, on a

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$$

d'après l'hypothèse.

▷ Si A n'est pas inversible, on introduit une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A . Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det \begin{pmatrix} A_k & B \\ -\overline{B} & \overline{A_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+$.

On conclut par passage à la limite, en utilisant la continuité du déterminant, de la conjugaison et le fait que $\mathbb{R}_+$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Partie II

6. a) $AB = A(BA)A^{-1}$. Donc, AB et BA sont semblables et $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

b) On considère une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A .

D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_k B} = \chi_{B A_k}$.

Par continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie), $A_k B \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} AB$ et $B A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} BA$.

Par ailleurs, la fonction $\chi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$ est continue :

$$M \longmapsto \chi_M$$

En effet, on pose, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_M =: \sum_{k=0}^n a_k(M)X^k$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_n[X]$ de

la norme du max des modules des coefficients (encore une fois, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Comme les $M \mapsto a_k(M)$, $0 \leq k \leq n$, sont polynomiales en les coefficients de la matrice, elles sont continues. D'où la continuité.

Donc, par passage à la limite, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\chi_{C\overline{C}}(\lambda)} = \overline{\det(\lambda I_n - C\overline{C})} = \det \left(\overline{\lambda I_n - C\overline{C}} \right) = \det(\lambda I_n - \overline{C}C) = \chi_{\overline{C}C}(\lambda) = \chi_{C\overline{C}}(\lambda)$$

Donc, les polynômes $\overline{\chi_{C\overline{C}}}$ et $\chi_{C\overline{C}}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est infini. Donc, $\overline{\chi_{C\overline{C}}} = \chi_{C\overline{C}}$. Ainsi, $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

7. $\chi_{C\overline{C}}$ annule $C\overline{C}$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton et est scindé à racines simples par hypothèse. Donc, $C\overline{C}$ est diagonalisable. Les valeurs propres sont toutes de multiplicité 1, donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

8. a) $C\overline{C}v = \lambda v$, donc

$$\overline{C}C\overline{v} = \overline{C\overline{C}v} = \overline{\lambda v} \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda \overline{v}$$

b)

$$C\overline{C}C\overline{v} = C(\lambda \overline{v}) = \lambda C\overline{v}$$

Donc, $C\overline{v} \in E_\lambda(C\overline{C})$ et $E_\lambda(C\overline{C})$ est une droite vectorielle dirigée par v (car $v \neq 0$, puisque v est un vecteur propre).

Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $C\overline{v} = \mu v$.

c)

$$C(\overline{\mu} \overline{v}) = \overline{\mu} C\overline{v} = \overline{\mu} \mu v = |\mu|^2 v \quad \text{et} \quad C(\overline{\mu} \overline{v}) = C(\overline{\mu v}) = C(\overline{C\overline{v}}) = C\overline{C}v = \lambda v$$

Comme $v \neq 0$, $\lambda = |\mu|^2 \in \mathbb{R}_+$.

9. $\chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme à coefficients réels qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 8. Il est donc de signe constant sur cet intervalle. Or,

$$\chi_{C\overline{C}}(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^n$$

Ainsi, $\chi_{C\overline{C}}$ a le signe de $(-1)^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc,

$$\det(I_n + C\overline{C}) = (-1)^n \det(-I_n - C\overline{C}) = (-1)^n \chi_{C\overline{C}}(-1) \geq 0$$

Partie III

10. Soit $(U, V) = \left(\sum_{k=0}^{r-1} u_k X^k, \sum_{l=0}^{q-1} v_l X^l \right) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$(U, V) = (U, 0) + (0, V) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k (X^k, 0) + \sum_{l=0}^{q-1} v_l (0, X^l) \in \text{Vect}(\mathcal{B})$$

$\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$ qui comporte $r+q = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

11. Soient $((U_1, V_1), (U_2, V_2)) \in (\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X])^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha(U_1, V_1) + \beta(U_2, V_2)) &= \varphi(\alpha U_1 + \beta U_2, \alpha V_1 + \beta V_2) = P(\alpha U_1 + \beta U_2) + Q(\alpha V_1 + \beta V_2) \\ &= \alpha(PU_1 + QV_1) + \beta(PU_2 + QV_2) \\ &= \alpha\varphi(U_1, V_1) + \beta\varphi(U_2, V_2) \end{aligned}$$

12. Pour tout $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $\varphi(X^j, 0) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^{k+j}$ et pour tout $j \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, $\varphi(0, X^j) = \sum_{l=0}^{r-1} b_l X^{k+j}$.

Donc,

$$M = \text{Syl}(P, Q)$$

13. a) Soit $(U, V) \in \text{Ker}(\varphi)$. Donc, $PU + QV = 0$, d'où $-PU = QV$.
Donc, P divise QV . Or, $P \wedge Q = 1$. Donc, P divise V (lemme de Gauss).
Si $V \neq 0$, alors $q-1 \geq \deg(V) \geq \deg(P) = q$. Absurde. Donc, $V = 0$. De même, $U = 0$.
Ainsi, φ est injective.
- b) φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension. C'est donc un isomorphisme. Ainsi, M est inversible. Donc,

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) = \det(\text{Syl}(P, Q)) = \det(M) \neq 0$$

14. Supposons que φ soit injective. Alors, φ est un isomorphisme. Ainsi, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$ vérifiant $PU + QV = 1$. Donc, $P \wedge Q = 1$ d'après le théorème de Bézout. Absurde. Ainsi, φ n'est pas injective. Donc, $\text{Syl}(P, Q)$ n'est pas inversible et son déterminant est nul.

15.

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{2 \times 1}{2}}}{a} \text{Res}_{\mathbb{K}}(aX^2 + bX + c, 2aX + b) = -\frac{1}{a} \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = -\frac{1}{a} \left(c \begin{vmatrix} 2a & b \\ 0 & 2a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & b \\ a & 2a \end{vmatrix} \right) = b^2 - 4ac$$

16. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, P et P' sont scindés, donc P et P' sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune, donc si et seulement si toutes les racines de P sont simples. Donc, P est scindé à racines simples si et seulement si $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P') \neq 0$ si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

Partie IV

17. a) Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, notons $HR(d)$ la propriété à montrer.

Initialisation. Un polynôme à une indéterminée admettant une infinité de racines est nul.

Hérédité. On fixe un entier $d \geq 2$. On suppose $HR(d-1)$ vraie.

Soit $P : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in S} a_{(k_1, \dots, k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}$ une fonction polynômiale s'annulant sur un produit $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ de parties infinies de $\mathbb{C}$.

Quitte à ajouter des coefficients nuls, on peut supposer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $S = \llbracket 0, r \rrbracket^d$.

On fixe $(u_1, u_2, \dots, u_{d-1}) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{d-1}$.

Alors, pour tout $x \in I_d$

$$0 = P(u_1, \dots, u_{d-1}, x) = \sum_{k=0}^r \underbrace{\left(\sum_{(k_1, \dots, k_{d-1}) \in \llbracket 0, r \rrbracket^{d-1}} a_{(k_1, \dots, k_{d-1}, k)} u_1^{k_1} \cdots u_{d-1}^{k_{d-1}} \right)}_{=: P_k(u_1, \dots, u_{d-1})} x^k$$

Ainsi, comme le polynôme à une indéterminée $x \mapsto P(u_1, \dots, u_{d-1}, x)$ admet une infinité de racines, ses coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$,

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_{d-1}) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{d-1}, P_k(u_1, \dots, u_{d-1}) = 0$$

donc d'après $HR(d-1)$, tous les coefficients de P_k sont nuls.

Ainsi, tous les coefficients de P sont nuls.

- b) Z_P est un fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue (car polynômiale) P .

Supposons que $\overset{\circ}{Z}_P \neq \emptyset$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut choisir la norme infinie sur $\mathbb{C}^d$. Il existe donc $\eta > 0$ et $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^d$ tel que

$$D(a_1, \eta) \times D(a_2, \eta) \times \cdots \times D(a_d, \eta) \subset Z_P$$

où $D(x, r)$ désigne le disque fermé de centre $x \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$

Ainsi, P s'annule sur un produit d'ensembles infinis et P est la fonction polynômiale nulle. Absurde.

Donc, Z_P est un fermé d'intérieur vide. Son complémentaire est donc un ouvert dense.

18. De manière analogue, on définit les fonctions polynômiales de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

On fixe une fonction polynômiale $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Si P s'annule sur un produit $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ de parties infinies de $\mathbb{R}$, alors P est nul, i.e. tous ses coefficients sont nuls. Il suffit de reprendre la démonstration de 17.(a) en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

La fonction $P : M \mapsto \Delta(\chi_{M\overline{M}})$ est polynômiale en les parties réelles et imaginaires des coefficients de M (on utilise l'identification naturelle entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^{2n^2}$), à valeurs réelles (car $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_{M\overline{M}} \in$

$\mathbb{R}[X]$) et n'est pas nulle, puisque si l'on pose $A := \text{Diag}(1, 2, \dots, n)$, $\Delta(\chi_{A\bar{A}}) = \Delta\left(\prod_{k=1}^n (X - k^2)\right) \neq 0$,

puisque $\prod_{k=1}^n (X - k^2)$ est scindé à racines simples.

Ω est le complémentaire de

$$Z_P := \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \Delta(\chi_{C\bar{C}}) = 0\}$$

qui est un fermé comme image réciproque de $\{0\}$ par la fonction continue P .

Si l'on suppose que Z_P est d'intérieur non vide, Z_P contient un produit d'intervalles non réduits à un point (en utilisant à nouveau l'identification précédente) donc infinis. Ainsi, P a tous ces coefficients nuls. Ce qui est absurde, puisque P n'est pas la fonction nulle.

Ainsi, Ω est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 19.** Soient $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω qui converge vers C (il en existe par densité).

D'après la question 9., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det(I_n + C_k \bar{C}_k) \in \mathbb{R}_+$.

La fonction $M \mapsto \det(I_n + M \bar{M})$ est continue (car par exemple, polynômiale en les parties réelles et imaginaires des coefficients de la matrice). Ainsi, comme $\mathbb{R}_+$ est fermé, par passage à la limite, $\det(I_n + C \bar{C}) \in \mathbb{R}_+$.

- 20. a)** Soient $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Le résultat est immédiat si $\lambda = 0$ puisque dans ce cas, $\det(\lambda I_n + C \bar{C}) = \det(C \bar{C}) = |\det(C)|^2 \geq 0$.

Supposons maintenant que $\lambda > 0$. Alors, d'après la question 19,

$$\det(\lambda I_n + C \bar{C}) = \lambda^n \det\left(I_n + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right)}\right) \geq 0$$

- b)** A étant à coefficients réels, $\bar{A} = A$, donc $\chi_M = \chi_{A\bar{A}}$. D'après la question précédente,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_-, (-1)^n \chi_M(\lambda) \geq 0$$

Soient λ_0 une valeur propre réelle strictement négative de M et $m \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.

D'après ce qui précède, χ_M s'annule en λ_0 sans changer de signe (car $\lambda_0 < 0$). Comme il existe $\alpha \neq 0$ vérifiant

$$\chi_M(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \lambda_0}{\sim} \alpha (\lambda - \lambda_0)^m$$

on en déduit que m est pair.

- c)** Supposons qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = \exp(U)$.

Si l'on pose $A := \exp\left(\frac{1}{2}U\right) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $M = A^2$. D'après la question précédente, les valeurs propres strictement négatives sont de multiplicité paire. 0 n'est pas une valeur propre de M puisque M est inversible comme exponentielle d'une matrice. Donc, les valeurs propres réelles négatives de M sont de multiplicité paire.

Partie V

- 21.** On note d le degré de D . Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Alors,

$$\begin{cases} P = \text{quo}_D(P)D + \text{rem}_D(P) \\ \deg(\text{rem}_D(P)) < d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q = \text{quo}_D(Q)D + \text{rem}_D(Q) \\ \deg(\text{rem}_D(Q)) < d \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \lambda P + \mu Q = (\lambda \text{quo}_D(P) + \mu \text{quo}_D(Q))D + (\lambda \text{rem}_D(P) + \mu \text{rem}_D(Q)) \\ \deg(\lambda \text{rem}_D(P) + \mu \text{rem}_D(Q)) < d \end{cases}$$

Par unicité, on en déduit que

$$\text{quo}_D(\lambda P + \mu Q) = \lambda \text{quo}_D(P) + \mu \text{quo}_D(Q) \quad \text{et} \quad \text{rem}_D(\lambda P + \mu Q) = \lambda \text{rem}_D(P) + \mu \text{rem}_D(Q)$$

Ainsi, quo_D et rem_D sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.

Par ailleurs,

$$\text{rem}_D(P) = 0 \times D + \text{rem}_D(P) \quad \text{et} \quad \deg(\text{rem}_D(P)) < d$$

Donc, par unicité,

$$\text{quo}_D(\text{rem}_D(P)) = 0 \quad \text{et} \quad \text{rem}_D(\text{rem}_D(P)) = \text{rem}_D(P)$$

Donc, $\text{rem}_D \circ \text{rem}_D = \text{rem}_D$. Ainsi, rem_D est un projecteur.

C'est le projecteur sur $\text{Im}(\text{rem}_D) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$ parallèlement à $\text{Ker}(\text{rem}_D) = D\mathbb{K}[X]$.

- 22.** E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quotient. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\bar{P} = \overline{\text{rem}_Q(P)} \in \text{Vect}(\mathcal{B}_0)$, puisque $\deg(\text{rem}_Q(P)) \leq \deg(Q) - 1 = r - 1$. Ainsi, $\mathcal{B}_0$ est une famille génératrice.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq r-1} \in \mathbb{K}^r$ vérifiant $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \bar{X}^k = \bar{0}$ i.e. $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k = \bar{0}$. Ainsi, Q divise $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k$.

Si $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k \neq 0$, alors $r = \deg(Q) \leq \deg\left(\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k\right) \leq r - 1$. Absurde. Donc, $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k = 0$ et les coefficients sont nuls. Ainsi, $\mathcal{B}_0$ est libre.

Donc, $\mathcal{B}_0$ est une base de E .

- 23.** a) $\Leftarrow$ Supposons que $P \wedge Q = 1$.

Alors, $\bar{P}$ est inversible d'après le théorème de Bézout.

Ainsi, en posant $g : \begin{matrix} E \\ \bar{U} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} E \\ \bar{P}^{-1}\bar{U} \end{matrix}$, $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$. Donc, f est un automorphisme de E .

$\Rightarrow$ Supposons que f soit un automorphisme de E .

En particulier, f est surjective. Donc, il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\overline{PU} = \bar{1}$. Ainsi, il existe $V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PU = 1 + QV$.

Donc, $P \wedge Q = 1$ d'après le théorème de Bézout.

- b) Pour tout $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $f(\bar{X}^j) = \overline{X^j P} = \overline{QU_j + R_j} = \bar{R}_j$. Donc, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \tilde{R}$.

- 24.** a) Soit $S \in \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

Alors, comme $\deg(\text{rem}_Q(S)) \leq r - 1 \leq q + r - 1$ et $\deg(S) \leq q + r - 1$,

$$\deg(\text{quo}_Q(S)) + r = \deg(\text{quo}_Q(S)Q) = \deg(S - \text{rem}_Q(S)) \leq \max(\deg(S), \deg(\text{rem}_Q(S))) \leq q + r - 1$$

Ainsi, $\deg(\text{quo}_Q(S)) \leq q - 1$. D'où,

$$\deg(P\text{rem}_Q(S) + Q\text{quo}_Q(S)) \leq \max(q + \deg(\text{rem}_Q(S)), r + \deg(\text{quo}_Q(S))) \leq q + r - 1$$

Ainsi, $\tilde{f}$ est bien définie.

- b) Soit $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$. Comme $\deg(U) < \deg(Q)$, $U = \text{rem}_Q(U + QV)$ et $V = \text{quo}_Q(U + QV)$. Ainsi,

$$\tilde{f}(U + QV) = PU + QV$$

- c) $\mathcal{B}$ est une famille de $q + r = \dim(\mathbb{K}_{q+r-1}[X])$ polynômes de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ étagée par les degrés. C'est donc une base de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

- d) Pour tout $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $\tilde{f}(X^j) = X^j P = QU_j + R_j$ et tout $j \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, $\tilde{f}(X^j Q) = X^j Q$.

Donc, en notant $\tilde{U}$ la matrice de $(U_0, U_1, \dots, U_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_{q-1}[X]$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ \tilde{U} & I_q \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\det(\tilde{f}) = \det(\tilde{R}) \det(I_q) = \det(f)$$

- 25.** a) Soit $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$\xi(U + X^r V) = PU + QV \quad \text{et} \quad \psi(U + X^r V) = U + QV$$

b) Pour tout $j \in \llbracket 0, q+r-1 \rrbracket$,

$$\xi(X^j) = \begin{cases} X^j P & \text{si } j \leq r-1 \\ X^{j-r} Q & \text{si } j \geq r \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(X^j) = \begin{cases} X^j & \text{si } j \leq r-1 \\ X^{j-r} Q & \text{si } j \geq r \end{cases}$$

Donc,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\xi) = \text{Syl}(P, Q)$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi) = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}^r & \overbrace{\begin{matrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & & & \\ \vdots & & & \\ b_r & & & \\ 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}}^q \end{array} \right]$$

La seconde matrice est triangulaire supérieure.

c) $\det(\psi) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)) = b_r^q \neq 0$ (car $\deg(Q) = r$), donc ψ est un automorphisme.

d) Avec les notations précédentes, on a

$$\tilde{f}(U + QV) = PU + QV = \xi(U + X^r V)$$

donc,

$$\tilde{f}(\psi(U + X^r V)) = \xi(U + X^r V)$$

Ainsi, comme $j : \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ est surjective, on en déduit que

$$\tilde{f} \circ \psi = \xi$$

donc

$$\tilde{f} = \xi \circ \psi^{-1}$$

26.

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) = \det(\xi) = \det(\tilde{f} \circ \psi) = \det(\tilde{f}) \det(\psi) = \det(f) b_r^q$$

Partie VI

27. a) Posons $P := \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$. Alors, P est inversible et $P^{-1} = P$. De plus,

$$P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$$

b) Posons $Q := \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$. Alors, Q est inversible et $Q^{-1} = Q$. De plus,

$$Q \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} Q^{-1} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

28. Posons $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ \bar{B} & \lambda I_n - \bar{A} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - \bar{A} & \bar{B} \\ -B & \lambda I_n - A \end{bmatrix} \right) \text{ d'après la question 27.(a)} \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - \bar{A} & -\bar{B} \\ B & \lambda I_n - A \end{bmatrix} \right) \text{ d'après la question 27.(b)} \\ &= \det \left(\overline{\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ \bar{B} & \lambda I_n - \bar{A} \end{bmatrix}} \right) \text{ car } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \overline{\chi_M(\lambda)} \end{aligned}$$

Ainsi, χ_M et $\overline{\chi_M}$ coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{R}$. Donc, $\chi_M = \overline{\chi_M}$ et $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$.

29. a) Soient $\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right) \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\theta \left(\lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right) = \theta \begin{pmatrix} \lambda X_1 + \mu X_2 \\ \lambda Y_1 + \mu Y_2 \end{pmatrix} \underset{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}{=} \begin{pmatrix} -\lambda \bar{Y}_1 - \mu \bar{Y}_2 \\ \lambda \bar{X}_1 + \mu \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \lambda \theta \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \mu \theta \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$. Alors, pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$,

$$u \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BY \\ -\bar{B}X + \bar{A}Y \end{pmatrix}$$

donc,

$$u \left(\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = u \begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\bar{Y} + B\bar{X} \\ \bar{B}\bar{Y} + \bar{A}\bar{X} \end{pmatrix}$$

et

$$\theta \left(u \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \theta \begin{pmatrix} AX + BY \\ -\bar{B}X + \bar{A}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\bar{B}X + \bar{A}Y) \\ AX + BY \end{pmatrix} = u \left(\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

Donc, u et θ commutent.

b)

$$\theta \circ \theta = -\text{Id}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n}$$

c) Posons $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_k)_{1 \leq k \leq n} \\ (y_k)_{1 \leq k \leq n} \end{pmatrix}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant

$$\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X - \mu \bar{Y} \\ \lambda Y + \mu \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(x_{k_0}, y_{k_0}) \neq (0, 0)$, puisque v non nul.

On déduit de l'égalité précédente que

$$\begin{cases} \lambda x_{k_0} - \mu \bar{y}_{k_0} = 0 \\ \lambda y_{k_0} + \mu \bar{x}_{k_0} = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène en (λ, μ) de déterminant $|x_{k_0}|^2 + |y_{k_0}|^2 > 0$.

C'est donc un système de Cramer et $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

Ainsi, $(v, \theta(v))$ est $\mathbb{C}$ -libre.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors, comme $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall w \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \theta(\lambda w) = \bar{\lambda} \theta(w)$,

$$\theta(\alpha v + \beta \theta(v)) = \bar{\alpha} \theta(v) + \bar{\beta} (\theta \circ \theta)(v) = \bar{\alpha} \theta(v) - \bar{\beta} v \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$$

d) Posons $F := E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$.

F est un sev de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par θ . Comme $v \notin E$, $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) \not\subset E$. Ainsi, $\dim(F) \leq 1$.

Supposons que $\dim(F) = 1$ et fixons $w \in F$ non nul. D'après la question 29.(c), $(w, \theta(w))$ est libre et $\theta(w) \in F$, puisque F est stable par θ . Absurde.

Donc $\dim(F) = 0$ et $E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

30. a) Posons $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$. Comme $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{\lambda}$ est une racine de χ_M de même multiplicité que λ et $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M . Notons m la multiplicité commune de λ et $\bar{\lambda}$.

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M . D'après la question 29.(a), θ

et u commutent. Soit $P := \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Alors,

$$\theta \circ P(u) = \theta \circ \left(\sum_{k=0}^d a_k u^k \right) = \sum_{k=0}^d \overline{a_k} \theta \circ u^k = \sum_{k=0}^d \overline{a_k} u^k \circ \theta = \left(\sum_{k=0}^d \overline{a_k} u^k \right) \circ \theta = \bar{P}(u) \circ \theta$$

En particulier,

$$\theta \circ (u - \lambda \text{Id})^m = (u - \bar{\lambda} \text{Id})^m \circ \theta$$

Donc, pour tout $v \in E'_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^m)$,

$$(u - \bar{\lambda} \text{Id})^m (\theta(v)) = \theta((u - \lambda \text{Id})^m (v)) = \theta(0) = 0 \quad \text{donc} \quad \theta(v) \in \text{Ker}((u - \bar{\lambda} \text{Id})^m) = E'_{\bar{\lambda}}$$

Ainsi, $\theta(E'_\lambda) \subset E'_{\bar{\lambda}}$.

Par ailleurs, $\dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda) = \dim_{\mathbb{C}}(E'_{\bar{\lambda}}) = m$, donc $\dim_{\mathbb{R}}(E'_\lambda) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_{\bar{\lambda}}) = 2m$. Or θ est un automorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Donc, $\dim_{\mathbb{R}}(\theta(E'_\lambda)) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_\lambda) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_{\bar{\lambda}})$. Ainsi, $\theta(E'_\lambda) = E'_{\bar{\lambda}}$.

b) Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la question précédente, E'_λ est stable par θ . Supposons que $\dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda)$ soit impair.

Soit $v_1 \in E'_\lambda$ non nul. Alors $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_1, \theta(v_1))$ est un plan stable par θ inclus dans E'_λ (car E'_λ est stable par θ) d'après la question 29.(c).

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $v_1, v_2, \dots, v_k$ tels que $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$, $1 \leq i \leq k$ soient des plans stables par θ vérifiant

$$\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \subset E'_\lambda$$

Comme $\dim_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \right) = 2k$ et $\dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda)$ est impair, l'inclusion précédente est stricte.

On fixe alors $w_{k+1} \in E'_\lambda$ tel que $w_{k+1} \notin \bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$.

Comme $\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$ est stable par θ , d'après la question 29.(b), $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_{k+1}, \theta(v_{k+1}))$ est un plan stable par θ inclus dans E'_λ (car E'_λ est stable par θ) et

$$\left(\bigoplus_{i=1}^k \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \right) \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_{k+1}, \theta(v_{k+1})) = \{0\}$$

Ainsi,

$$\bigoplus_{i=1}^{k+1} \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \subset E'_\lambda$$

On aboutit à une contradiction dès que $k > \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda)$. Ainsi, E'_λ est de dimension paire.

- 31.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. On a montré que $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, si λ est une racine complexe de multiplicité m , alors $\overline{\lambda}$ est également une racine de multiplicité m . On factorise χ_M dans $\mathbb{C}[X]$

$$\chi_M = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} (X - \overline{\lambda_i})^{m_i} \prod_{j=1}^s (X - \mu_j)^{n_j}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les racines non réelles à partie imaginaire strictement positive et où $\mu_1, \dots, \mu_s$ sont les racines réelles.

D'après la question 30. pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $n_j = \dim_{\mathbb{C}} \left(E'_{\mu_j} \right)$ est pair.

Ainsi,

$$\det(M) = \prod_{i=1}^r |\lambda_i|^{2m_i} \prod_{j=1}^s \mu_j^{n_j} \in \mathbb{R}_+$$

3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :

http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_interne/22/4/s2018_agreg_interne_math_2_887224.pdf

3.2.1 Présentation du sujet

Dans ce problème, l'objectif est d'étudier la ligne d'équidistance de deux fermés de $\mathbf{R}^2$ séparés par une droite.

Dans la partie **I-A**, on revoit quelques propriétés classiques sur la notion de distance à une partie.

Dans la partie **I-B**, on étudie quelques exemples dans $M_n(\mathbf{R})$ muni de la norme liée au rayon spectral.

Dans la partie **II** on s'intéresse à un exemple de points d'une courbe à égale distance d'une droite.

Dans la partie **III**, on introduit la notion de courbe médiatrice de deux fermés de $\mathbf{R}^2$ séparés par une droite et on étudie sa continuité.

Dans la partie **IV**, on mène une étude plus fine et on montre l'existence d'une asymptote dans le cas où les fermés sont compacts.

Signalons que l'on peut établir la dérivabilité à gauche et à droite en chaque point, et même la dérivabilité si les fermés sont en plus convexes.

Les ingrédients pour ce problème relevaient de la topologie, de la compacité, de l'algèbre bilinéaire, des suites et séries de fonctions et de l'informatique.

3.2.2 Remarques générales

La clarté, la rigueur, la précision et la concision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation des copies. De nombreux candidats perdent des points précieux dans les questions les plus accessibles du problème par des défauts de rédaction.

Les arguments trop souvent invoqués tels que : « c'est évident », « forcément », « on voit facilement que » ne constituent pas une preuve sauf à citer en quelques mots simples ce qui est évident, facile ou forcé.

L'utilisation des hypothèses données dans l'énoncé doit être signalée au moment opportun et non en vrac en début de réponse, afin de bien faire ressortir l'articulation du raisonnement. Il ne faut pas hésiter à illustrer ses idées à l'aide de dessins clairs et convaincants comme l'avait suggéré l'énoncé.

Il faut que les futurs candidats soient persuadés qu'ils ne perdront pas de temps ni de points, bien au contraire, en proposant une rédaction complète et rigoureuse des questions qu'ils auront résolues (tout en sachant rester concis...). Le jury a particulièrement apprécié certaines copies bien rédigées montrant un niveau mathématique solide, une fluidité et une pertinence dans les arguments de rédaction.

Par ailleurs, ce problème était volontairement de difficulté progressive et découpé en parties largement indépendantes pour permettre aux candidats de mettre en valeur leurs différentes compétences sur des thèmes variés. Si le grappillage est déconseillé, il est tout à fait compréhensible qu'un candidat se sente peu à l'aise avec les notions développées dans une partie donnée ou soit bloqué après une recherche sérieuse, lorsque la difficulté devient trop élevée. Le candidat a alors tout intérêt, soit

à regarder si les dernières questions de la partie (qui consistent souvent en une récapitulation ou mise en application sur un exemple des résultats théoriques acquis dans la partie) sont abordables en admettant les résultats précédents, soit à regarder s'il se sent plus à l'aise sur les parties suivantes.

3.2.3 Statistiques de réussite

Dans l'ensemble les candidats admissibles ont traité les deux premières parties (I-A, I-B et II). Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions (chaque barre correspond à un item de correction).

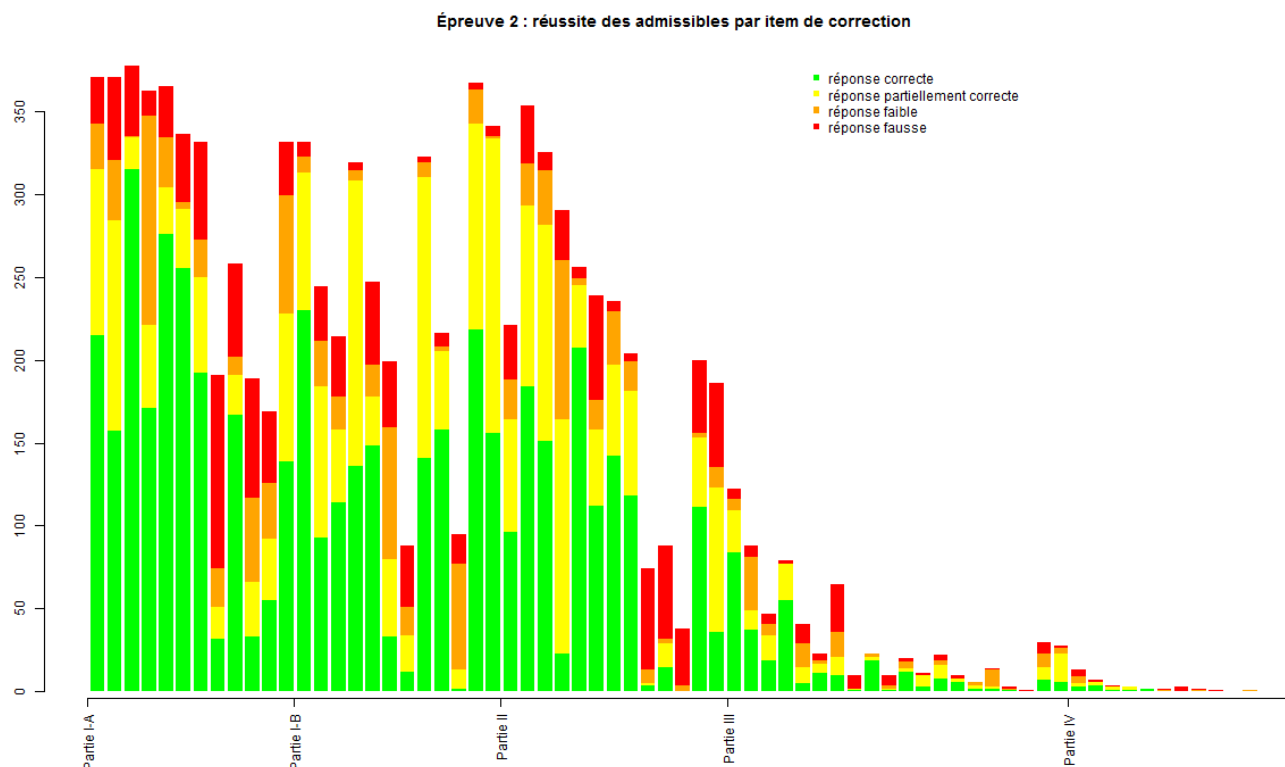


FIGURE 3.2 – Lecture : pour chaque question, la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.2.4 Commentaires par question

PARTIE I-A

Cette partie a été abordée par une grande majorité des candidats mais a révélé de grandes lacunes sur la notion de borne inférieure et sa manipulation. Les correcteurs regrettent un manque de rigueur et de soin dès les premières questions. Il est bon de rappeler qu'en début de problème, il convient de mettre l'accent sur la précision des raisonnements. Les premières questions sont en effet très abordables, ce qui donne l'occasion aux candidats de montrer leurs capacités de rédaction. Bien sûr, il ne s'agit pas de tout détailler et de redémontrer des résultats de cours. Il faut trouver un juste milieu

entre ne rien dire et trop en dire.

Les questions **1** et **2** ont été traitées par la majorité des candidats mais laissent apparaître une confusion entre minimum et borne inférieure. On rappelle que la manipulation des inégalités strictes demande beaucoup de soin. Il faut prendre garde à ne pas confondre A fermé et A compact. En outre, il n'y a pas, en général, unicité de la suite d'éléments qui converge vers un élément de l'adhérence.

La question **3-a** a fait l'objet d'erreurs fréquentes avec les quantificateurs et des confusions entre variables libres et variables muettes, par exemple en écrivant :

« $\forall (x, y) \in E^2, d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, y)$ » ou encore « $\inf_{b \in B} d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$ ».

D'une manière générale, il faut justifier les passages à la borne inférieure.

Dans la question **3-b**, il est bon de rappeler que l'aspect lipschitzien nécessite des valeurs absolues.

La question **4** a été assez peu abordée de manière significative, les argumentations demandant à être plus affinées.

Dans la question **5-a**, il faut prendre garde au fait que si $A \neq B$, il n'existe pas nécessairement d'élément $x \in B \setminus A$.

Dans la question **6**, on relève beaucoup de confusion au niveau des arguments de compacité. Il est bon de rappeler que le point clé est la continuité de $y \mapsto d(x, y)$ et la compacité de la partie non vide A .

La question **7** a donné lieu à beaucoup d'erreurs de raisonnement, s'expliquant par des confusions entre fermés et compacts.

La question **8** a été abordée par bon nombre de candidats. Rappelons que la négation d'être une partie ouverte n'est pas être une partie fermée. En outre une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé.

La question **9** a été assez peu abordée de manière significative. Quelques confusions sur la notion d'hyperplan ont été relevées.

Partie I-B

Dans la question **10**, largement abordée, certains candidats pensent simplifier les calculs en changeant de norme. Signalons que l'équivalence des normes sur $\mathbf{R}^n$ ne signifie pas qu'elles définissent la même norme d'opérateur sur $M_n(\mathbf{R})$.

La question **11** a mis en avant quelques erreurs de technicité. Rappelons que « $U \in M_n(\mathbf{R})$ est orthogonale » n'est pas équivalent à « $\det(U) \in \{-1, 1\}$ ».

La question **12** a donné lieu à quelques maladroites à cause de confusions : rappelons que le déterminant n'est pas une forme linéaire. En outre, le fait de savoir que l'image d'un ensemble A par une application continue est un fermé ne permet pas d'affirmer que l'ensemble A est un fermé. Enfin, rappelons que « $f(A) = F$ » n'est en général pas équivalent à « A est l'image réciproque de F par f ».

Les questions **13** et **14** ont été peu abordées de manière significative.

La question **15-a** a été traitée avec un manque de soin : l'usage de symboles de sommation sans indice provoque des confusions entre somme partielle et somme d'une série. Il faut prendre garde au

fait que les majorations du type :

$$\left\| \sum_{k=0}^n A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|A\|^k$$

ne sont pas des arguments de convergence absolue.

Les questions **15-b** et **16** ont été peu abordées de manière significative.

Partie II

La question **17** étant une première question, elle demandait un soin particulier. On rappelle qu'il faut justifier la dérivabilité d'une fonction avant de calculer sa dérivée. En outre l'usage du théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence de α mais pas l'unicité.

La question **18** a donné lieu à quelques confusions pour les rares copies qui l'ont abordée de manière significative : les candidats confondent régulièrement l'approximation de α à ε près et $|f'(x)| \leq \varepsilon$.

La question **19** a été abordée avec quelquefois des maladroites. Rappelons que f bornée ou f de limite nulle en $+\infty$ n'est pas une condition suffisante d'intégrabilité sur $[0, +\infty[$.

La question **20** a été abordée mais mal rédigée, avec des confusions très courantes entre f_n et $f_n(x)$, ce qui nuit à la clarté et à la précision des calculs.

La question **21** a été traitée mais avec un manque de soin dans les justifications. Beaucoup de candidats font l'interversion somme/intégrale sans aucun argument ; la plupart de ceux qui donnent un argument utilisent la convergence uniforme pour intervertir somme et intégrale, sans voir qu'on n'est pas sur un segment. Rappelons en outre que le théorème de convergence dominée s'applique pour les *suites* de fonctions et non les *séries* de fonctions (il faut dans ce cas l'appliquer aux sommes partielles).

Les questions **22** et **23** ont été abordées mais mal rédigées car celles-ci nécessitaient de bien citer les théorèmes sur la continuité des fonctions réciproques.

Les questions **24**, **25** et **26** ont été très peu abordées de manière significative. Rappelons toutefois que la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone sur I est dérivable si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas sur I .

Parties III et IV

Ces parties ont été très peu abordées de manière significative à l'exception de la question **27**, où la réponse à la question était rappelée en préliminaire. On regrette la tendance au grappillage.

3.2.5 Éléments de correction

Cette section a pour objet de proposer aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Ces éléments de correction ne préfigurent pas les attentes du jury en matière de rédaction. Les candidats sont invités pour cela à se référer aux conseils donnés dans les sections précédentes et dans les rapports de jury antérieurs.

Partie I-A

1 $d_B \leq d_A$: Pour tout $x \in A \subset B$, on a par définition de $d_B(x)$, l'inégalité $d_B(x) \leq d_A(x)$, d'où le résultat.

2 Caractérisation de l'adhérence : Considérons un élément $x \in E$. On sait qu'il existe une suite minimisante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $d(x, a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d_A(x)$. La caractérisation séquentielle de l'adhérence de A fournit alors le résultat .

3-a $d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y)$: — Fixons x et y deux éléments de E . Pour tout $a \in A$, on a

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Il en résulte que pour tout $a \in A$, on peut écrire

$$d_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a),$$

et par suite

$$d_A(x) - d(x, y) \leq d_A(y) \quad \text{soit} \quad d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y).$$

3-b d_A lipschitzienne : — Fixons x et y deux éléments de E . On a $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$ et en échangeant leurs rôles , il vient $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$, d'où on en déduit

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

Le résultat annoncé en découle.

4 $d_A = d_{\overline{A}}$: — Fixons x un élément de E . Comme on a $A \subset \overline{A}$, on peut déjà écrire l'inégalité $d_{\overline{A}}(x) \leq d_A(x)$. Par ailleurs, considérons $\varepsilon > 0$.

Il existe $a_\varepsilon \in \overline{A}$ tel que : $d_{\overline{A}}(x) \leq d(x, a_\varepsilon) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2$. En outre, il existe $a \in A$ tel que $d(a_\varepsilon, a) \leq \varepsilon/2$. On en déduit que :

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, a) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon,$$

ie $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$, inégalité valable, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où l'égalité annoncée.

5-a $d_A = d_B$ ssi $A = B$: — Le sens $A = B \implies d_A = d_B$ est évident. Supposons $d_A = d_B$ et considérons $x \in A$. Alors on a successivement $d_A(x) = 0 = d_B(x)$ et par suite $x \in \overline{B} = B$, car B est fermé, d'où $A \subset B$ et par symétrie, $A = B$.

5-b $d_A = d_B$ ssi $\overline{A} = \overline{B}$: — Comme $d_A = d_{\overline{A}}$ et $d_B = d_{\overline{B}}$, on peut écrire que $d_A = d_B$ ssi $d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}}$ ie, puisque $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermées, ssi $\overline{A} = \overline{B}$.

6 Cas A compact non vide : — Considérons x dans E .

L'application $y \mapsto d(x, y)$ est continue sur le compact A donc elle admet un minimum sur A .

En particulier, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = \min_{y \in A} d(x, y) = d_A(x)$.

7 Cas E affine euclidien : — Fixons x un élément de E et $r = 1 + d(x, A)$.

Considérons $B_F(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r .

La définition de $d(x, A)$ permet de voir que :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A \cap B_F(x, r)} d(x, a) .$$

Comme E est de dimension finie, l'ensemble $A \cap B_F(x, r)$ est compact et l'on a alors

$$d(x, A) = \inf_{a \in A \cap B_F(x, r)} d(x, a) = \min_{a \in A \cap B_F(x, r)} d(x, a),$$

du fait que l'application $y \mapsto d(x, y)$ est continue sur E , d'où le résultat annoncé.

8-a A est fermé : — En effet, pour x un point adhérent à A , on a $d_A(x) = d(x, A) = 0$. Les hypothèses sur A assurent que $x \in A$ et donc que A est fermé.

8-b A est un intervalle fermé : — Nous allons établir la convexité de A . Si A est un singleton, le résultat est immédiat.

Sinon considérons $(u, v) \in A^2$ avec $u < v$. Montrons que $[u, v]$ est contenu dans A .

Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence de $w \in]u, v[$ tel que $w \notin A$.

Les ensembles $S = [u, w] \cap A$ et $T = [w, v] \cap A$ sont des compacts non vides.

On peut donc poser $\alpha = \max S$ et $\beta = \min T$ de tel sorte que $\alpha < w < \beta$ et $[\alpha, \beta] \cap A = \{\alpha, \beta\}$.

Le réel $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ vérifie alors

$$d(\gamma, A) = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta| = \frac{\beta - \alpha}{2},$$

de sorte que cette dernière distance est atteinte en deux points distincts de A , ce qui constitue une contradiction. En conclusion, A est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

9 Expression de $d_H(x)$: — Pour tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in H$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b| &= |(a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b) - (a_1y_1 + \dots + a_ny_n + b)| \\ &= |a_1(x_1 - y_1) + \dots + a_n(x_n - y_n)| \\ &\leq \|a\| \|x - y\|, \end{aligned}$$

avec un cas d'égalité lorsque $y = p_H(x)$, la projection orthogonale de x sur H .

Le résultat annoncé en découle.

Partie I-B

10-a Expression de $\|u\|$: — Considérons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$:

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n^2,$$

avec un cas d'égalité pour $x = e_n$, d'où le résultat annoncé.

10-b Expression de $\|A\|$: — Cela découle du fait que A et u ont le même spectre.

11-a Existence de C : — Les matrices tMM et I_n sont congruentes donc tMM est symétrique définie positive. Il existe donc $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

$${}^tMM = {}^tUDU = U^{-1}DU.$$

On considère $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et on pose $C = {}^tU\Delta U$. Les matrices C et Δ sont congruentes donc C est symétrique définie positive. En outre, on a bien :

$$C^2 = ({}^tU\Delta U)^2 = (U^{-1}\Delta U)^2 = U^{-1}\Delta^2 U = U^{-1}DU = {}^tMM,$$

d'où le résultat.

11-b Existence de U : — Comme C est inversible, on peut poser $U = MC^{-1}$.

On a bien $M = UC$ avec successivement :

$${}^tUU = {}^t(MC^{-1})MC^{-1} = {}^t(C^{-1}){}^tMM C^{-1} = C^{-1}{}^tMM C^{-1} = C^{-1}C^2 C^{-1} = I_n,$$

d'où le résultat annoncé.

12-a $\mathcal{F}$ est fermé : — L'application déterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ comme fonction polynomiale à plusieurs lettres. Il en découle que $\mathcal{F} = \det^{-1}(\{1\})$ est fermée comme image réciproque d'une partie fermée de $\mathbb{R}$ par une application continue.

12-b $\mathcal{F}$ n'est pas compact : — Notons $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la famille des matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{R})$. La suite $M_p = I_n + pE_{12}$ est à valeurs dans $\mathcal{F}$ et est non bornée. Il en découle que $\mathcal{F}$ n'est pas borné et *a fortiori* non compact.

13 $d(\mathbf{0}_n, \mathcal{F}) = 1$: — Considérons M une matrice de $\mathcal{F}$.

Introduisons sa décomposition polaire $M = UC$ avec U orthogonale et C symétrique réelle > 0 .

On a facilement $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$, puis on peut écrire :

$$\|M\| = \|UC\| \leq \|U\| \|C\| = \|C\| \quad \text{et} \quad \|C\| = \|U^{-1}M\| \leq \|U^{-1}\| \|M\| = \|M\|,$$

ce qui fournit $\|M\| = \|C\|$. Par ailleurs, on a

$$\det(C)^2 = \det(C^2) = \det({}^tMM) = \det(M)^2 = 1.$$

Comme $\det(C) > 0$, on en déduit que $\det(C) = 1$. Ces dernières égalités donnent $\|M\| = \|C\| \geq 1$, en vertu du fait que C a au moins l'une de ses valeurs propres supérieure ou égale à 1.

On a un cas d'égalité pour $M = I_n$, d'où le résultat annoncé.

14 Cas d'égalité : — Le cas d'égalité $\|M\| = 1$ dans ce qui précède conduit à $\|C\| = 1$, d'où le spectre de C est alors contenu dans $]0, 1]$. Comme $\det(C) = 1$, on en déduit que chaque valeur propre de C est égale à 1, ie puisque C est diagonalisable, on peut écrire que $C = I_n$ ou encore que $M \in SO_n(\mathbb{R})$.

On a donc établi que l'ensemble des matrices de $\mathcal{F}$ en lesquelles cette distance est atteinte est $SO_n(\mathbb{R})$.

15-a Relation souhaitée : — On peut écrire que $\|A^p\| \leq \|A\|^p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Le membre de droite étant le terme général d'une série géométrique convergente, on a la convergence absolue demandée.

En outre, on a du fait de la continuité de la multiplication matricielle :

$$(I_n - A) \sum_{p=0}^{\infty} A^p = \sum_{p=0}^{\infty} (A^p - A^{p+1}) = I_n,$$

d'où le résultat annoncé.

15-b Implication souhaitée : — Fixons $T \in GL_n(\mathbb{R})$. Introduisons $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $H = T - M$ vérifie : $\|H\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Alors on peut écrire

$$M = T - H = T(I_n - T^{-1}H).$$

Comme on a

$$\|T^{-1}H\| \leq \|T^{-1}\| \|H\| < 1,$$

la matrice $I_n - T^{-1}H$ est inversible et par suite M est inversible, d'où le résultat.

16 $d(T, \mathcal{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$: — Ce qui précède montre que si M est singulière, on a

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \|T - M\|.$$

On va déterminer une matrice $M \in \mathcal{S}$ pour laquelle on a égalité.

Introduisons $T = UC$ la décomposition polaire de T avec U orthogonale et C symétrique réelle à valeurs propres strictement positives.

On peut écrire $C = {}^tP \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$ où P est orthogonale et $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de C . À l'aide de ce qui précède, on en déduit comme en **13** que

$$\|T^{-1}\| = \|C^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_1}.$$

L'inégalité précédente devient un cas d'égalité pour le choix de

$$M = U {}^tP \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)P$$

qui est bien une matrice singulière, d'où le résultat annoncé.

Partie II

17-a Variation de f : — La fonction f est de classe C^∞ avec :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2} \quad \text{où} \quad g(x) = e^x(1 - x) + 1.$$

Comme $g'(x) = -xe^x$, on a les variations suivantes pour g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	1	> 0	$-\infty$

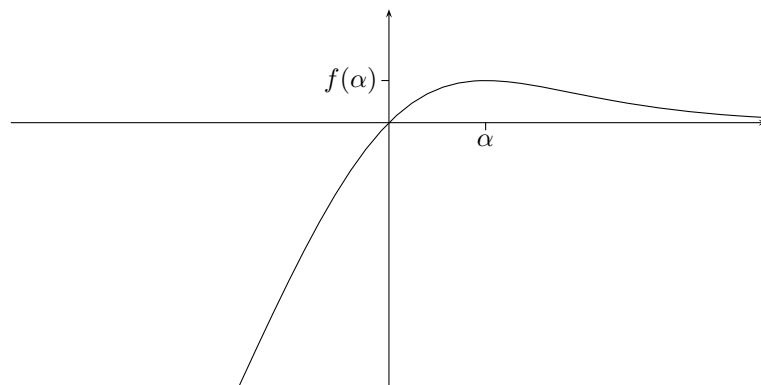
qui met en évidence, par le théorème de la bijection sur $[0, +\infty[$, l'existence d'un unique réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$, du fait que $g(1) = 1 > 0$ et $g(2) = 1 - e^2 < 0$.

On en déduit les variations suivantes pour f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

et donc f présente en α un maximum.

17-b Représentation de Γ : —



18 Implémentation de alpha : — On a vu que g est strictement décroissante sur $[1, 2]$ et s'annule en α . Commençons par définir g :

```
Fonction g(x)
    retourner (1-x)*expo(x)+1
```

On procède à la recherche d'un zéro de g par dichotomie sur $[1, 2]$.

```

procédure alpha(epsilon)
  Initialiser a à 1
  Initialiser b à 2
  tant b-a>epsilon
    faire
      début de boucle
        m=(a+b)/2
        si g(m)>0
          a<-m
        sinon
          b<-m
      fin de boucle
  renvoyer (a+b)/2

```

19 f est intégrable sur $[0, +\infty[$: — La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ avec

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2xe^{-x} \underset{+\infty}{=} O(e^{-x/2}).$$

Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est continue intégrable sur $[0, +\infty[$, le résultat en découle.

20 Relation souhaitée : — Le résultat est clair à l'origine. Sinon, pour $x > 0$, la série proposée est géométrique de raison $-e^{-x} \in]-1, 1[$ donc elle converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{2xe^{-x}}{1 + e^{-x}} = f(x).$$

21 Calcul demandé : — Par des arguments analogues à ci-dessus, on vérifie que chaque f_n est C^0 intégrable sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\int_{\mathbb{R}^+} |f_n| = \int_0^{+\infty} 2te^{-(n+1)t} dt = \frac{2}{(n+1)^2},$$

ie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} |f_n|$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)^2} = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{(2p+2)^2} \right).$$

On a successivement :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24},$$

et

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{3}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f = 2 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{(2p+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

22-a CNS d'équidistance à Δ : — Pour tout point M de coordonnées (x, y) , on a $d(M, \Delta) = |y|$. Si M_1 et M_2 sont de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , on a $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ et donc

$$d(M_1, \Delta) = d(M_2, \Delta) \iff |y_1| = |y_2| \iff |f(x_1)| = |f(x_2)|,$$

d'où le résultat.

22-b Existence de φ : — Considérons $x \in]0, \alpha]$. Un point N de Γ d'abscisse $y \geq \alpha$ vérifie donc la condition

requis si et seulement si : $|f(x)| = |f(y)|$ ie $f(x) = f(y)$.

La fonction f est continue et ses variations assurent que $f(x) \in]0, f(\alpha)]$ puis qu'elle induit une bijection de $[\alpha, +\infty[$ sur $]0, f(\alpha)]$. On en déduit l'existence d'un unique réel $y \in [\alpha, +\infty[$ tel que $f(y) = f(x)$.

Le point N de Γ d'abscisse y répond donc à la question.

23-a Expression de φ : — La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Ses variations assurent que f_1 est strictement croissante et réalise une bijection de $]0, \alpha]$ sur $]0, f(\alpha)]$ puis que f_2 est strictement décroissante et réalise une bijection de $[\alpha, +\infty[$ sur $]0, f(\alpha)]$. Pour tout $(x, y) \in]0, \alpha] \times [\alpha, +\infty[$, on peut écrire :

$$f(x) = f(y) \iff f_1(x) = f_2(y) \iff f_2^{-1}(f_1(x)) = y,$$

ie que l'on a l'expression $\varphi = f_2^{-1} \circ f_1$.

23-b Continuité de φ : — Les fonctions f_1 et f_2 étant continues, la réciproque de f_2 est continue puis par théorème de composition, la fonction φ est continue. Les règles de composition et de monotonie assurent que φ est strictement décroissante, que $\varphi(\alpha) = \alpha$ puis que $\varphi(x) = f_2^{-1}(f_1(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

24 Équivalent en 0 : — En partant de la relation $f(\varphi(x)) = f(x)$, il vient :

$$\frac{2x}{1+e^x} = \frac{2\varphi(x)}{1+e^{\varphi(x)}}.$$

On a donc au voisinage de l'origine : $x \underset{0}{\sim} 2\varphi(x)e^{-\varphi(x)}$, du fait que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

En passant au logarithme, on peut écrire : $\ln(x) \underset{0}{\sim} -\varphi(x)$, soit $\varphi(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

25 Régularité de φ : — Les fonctions f_1 et f_2 sont strictement monotones de classe C^∞ puis f_2' ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$. Ainsi $f_2^{-1} :]0, f(\alpha)] \rightarrow [\alpha, +\infty[$ est de classe C^∞ sur $]0, f(\alpha)[$ puis par théorème de composition, la fonction φ est de classe C^∞ sur $]0, \alpha[$.

26 Dérivabilité de φ en α : Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure du fait que $f'(\alpha) = 0$. On va raisonner directement. Remarquons que $f''(\alpha) \neq 0$.

En effet, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f'(x)(e^x + 1)^2 = 2g(x),$$

où g désigne la fonction introduite à la réponse 17-b. D'où par dérivation, il vient

$$f''(\alpha)(e^\alpha + 1)^2 = 2g'(\alpha) = -2\alpha e^\alpha < 0.$$

On en déduit qu'autour de α , on a : $f(x) - f(\alpha) \sim \frac{(x - \alpha)^2}{2} f''(\alpha)$, puis, comme $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \alpha$, il vient

$f(\varphi(x)) - f(\alpha) \sim \frac{(\varphi(x) - \alpha)^2}{2} f''(\alpha)$. La relation $f(\varphi(x)) = f(x)$ conduit à

$$\frac{(\varphi(x) - \alpha)^2}{2} f''(\alpha) \sim \frac{(x - \alpha)^2}{2} f''(\alpha) \quad \text{ie} \quad \varphi(x) - \alpha \sim -(x - \alpha),$$

d'où φ est dérivable en α , avec $\varphi'(\alpha) = -1$.

III : Courbe médiatrice de deux fermés dans $\mathbb{R}^2$

27-a Cas d'un point et d'une droite. — On suppose que $A = \{a\}$ où $a \in \mathcal{P}^+$ et que B est une droite horizontale. Il est bien connu que l'ensemble des points équidistants de a et de B est la parabole de foyer a et de directrice B .

27-b Cas $A = \{(0, 1)\}$ et $B = \{(-1, -1), (1, -1)\}$. — Nous poserons $a = (0, 1)$, $b_1 = (-1, -1)$ et

$b_2 = (1, -1)$. L'axe des ordonnées constitue la médiatrice de $[b_1, b_2]$ (cf figure 1), donc pour $m = (x, y) \in \mathcal{P}$, on a

$$d_B(m) = \begin{cases} d(m, b_1), & \text{pour } x \leq 0 \\ d(m, b_2), & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}.$$

Notons $\varphi_{a,b}$ la fonction dont le graphe sur $\mathbb{R}$ est la médiatrice de $[a, b]$, pour tout $b \in \mathcal{P}^-$. On voit alors que $\Gamma_{A,B}$ est l'ensemble des points du graphe de la fonction $\sup(\varphi_{a,b_1}, \varphi_{a,b_2})$.

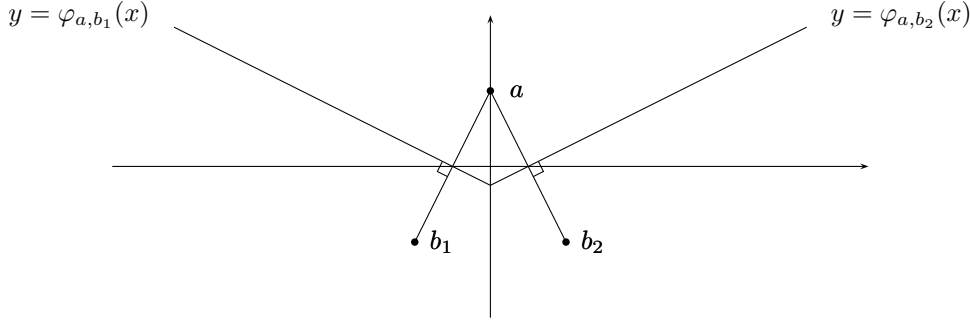


Figure 1

28-a Majoration souhaitée. — Les hypothèses permettent d'avoir $d_A(x_0, t) \leq d((x_0, t), a)$ puis $d_B(x_0, t) \geq t$, pour tout $t \geq 0$. Le résultat en découle.

28-b Existence de t_0 . — Introduisons un point $a = (a_1, a_2)$ de A . On peut écrire : $(\forall t \in \mathbb{R})$,

$$d((x_0, t), a)^2 - t^2 = (d((x_0, t), a) - t)(d((x_0, t), a) + t) = -2ta_2 + (x_0 - a_1)^2 + a_2^2,$$

ce qui fournit la relation demandée pour le choix de

$$\lambda = 2a_2 > 0 \quad \text{et} \quad \mu = -((x_0 - a_1)^2 + a_2^2).$$

D'après ce qui précède, on a pour tout $t > 0$

$$\Phi_{x_0}(t) \leq d((x_0, t), a) - t = -\frac{\lambda t + \mu}{d((x_0, t), a) + t}.$$

Le dernier membre est strictement négatif pour $t > 0$ assez grand puisque $\lambda > 0$, d'où le résultat.

28-c Φ_{x_0} prend des valeurs > 0 . — Si $b = (b_1, b_2) \in B$, on a de même $b_2 < 0$ et pour $t < 0$

$$\Phi_{x_0}(t) \geq \frac{2tb_2 - (x_0 - b_1)^2 - b_2^2}{d((x_0, t), b) + |t|}.$$

La fonction Φ_{x_0} prend donc des valeurs strictement positives pour $t < 0$ avec $|t|$ assez grand.

28-d Existence de y_0 . La fonction Φ_{x_0} est continue comme composée d'applications continues. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence de $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi_{x_0}(y_0) = 0$.

28-e $\Phi_{x_0}(y) > 0$. Le point m est situé sur l'axe : $x = x_0$ strictement sous m_0 . (cf figure 2)

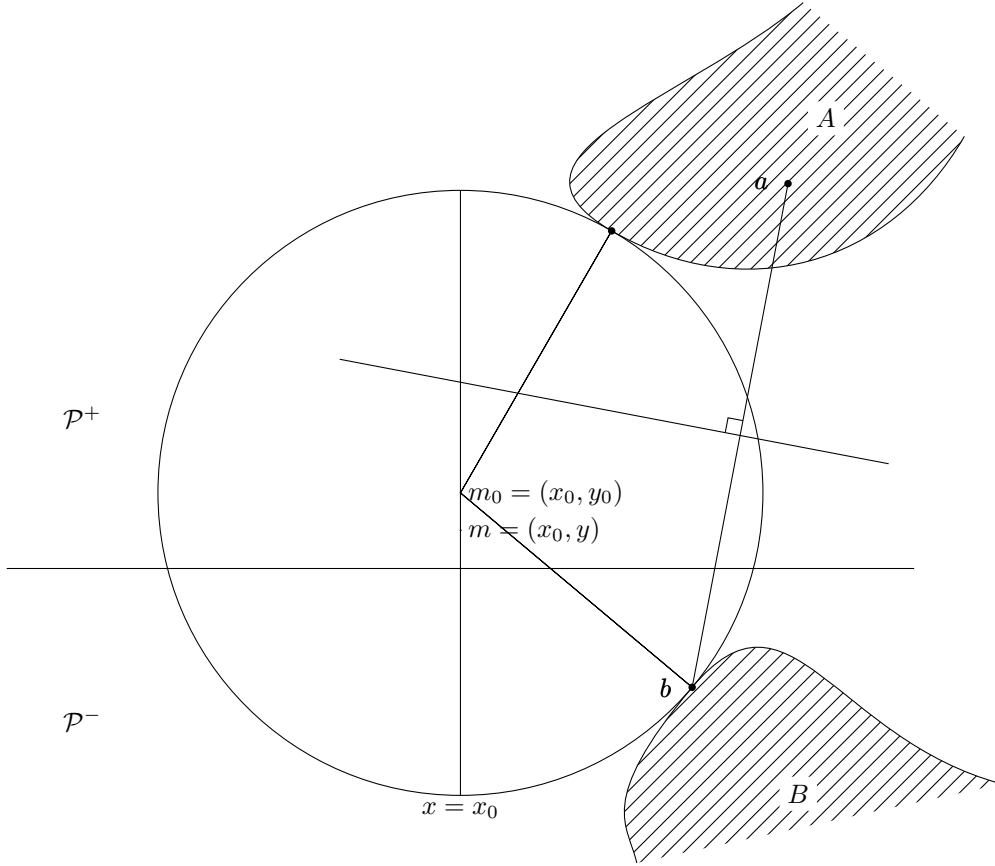


Figure 2

On a $d_A(m_0) = d_B(m_0)$ et l'on peut déjà écrire que $d_B(m) \leq d(m, b)$.

Considérons un point $a \in A$. Comme on a $d(m_0, b) \leq d(m_0, a)$, les points m_0 et b sont sous la médiatrice du segment $[a, b]$, qui selon les hypothèses n'est pas vertical. En particulier, le point m est strictement sous cette médiatrice et donc $d(m, b) < d(m, a)$.

Comme il existe $a' \in A$ tel que $d_A(m) = d(m, a')$, on en déduit que $d_B(m) \leq d(m, b) < d_A(m)$, puis que $\Phi_{x_0}(y) > 0$, d'où le résultat annoncé.

28-f Existence de $\varphi_{A,B}$. — De manière symétrique, on vérifie que pour $y > y_0$, on a $\Phi_{x_0}(y) < 0$.

On en déduit que pour tout réel x , il existe un unique réel $y = \varphi_{A,B}(x)$ tel que l'élément $(x, y) \in \Gamma_{A,B}$. Il en résulte que $\varphi_{A,B} : x \mapsto \varphi_{A,B}(x)$ constitue une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le graphe est exactement la courbe médiatrice de A et B .

29 Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. — Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists p > n) \text{ tel que } |u_p - \sigma| \geq \varepsilon.$$

Introduisons l'application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par récurrence comme suit :

Il existe $\psi(0) > 0$ tel que $|u_{\psi(0)} - \sigma| \geq \varepsilon$. Supposons $\psi(0), \dots, \psi(n-1)$ définie pour $n \geq 1$ tel que $0 < \psi(0) < \dots < \psi(n-1)$ avec $|u_{\psi(k)} - \sigma| \geq \varepsilon$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Il existe alors un entier $\psi(n) > \psi(n-1)$ tel que $|u_{\psi(n)} - \sigma| \geq \varepsilon$, d'où ψ vérifie la propriété précédente jusqu'au rang n . L'application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est alors strictement croissante et met en évidence une suite extraite $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|u_{\psi(n)} - \sigma| \geq \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle admet une valeur d'adhérence qui sera la même que la valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc σ est une valeur d'adhérence de $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui contredit $|u_{\psi(n)} - \sigma| \geq \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il en découle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma$.

30-a Existence de P_1 et P_2 . — Les inégalités vues en **28-b-c** montrent que, avec les mêmes notations

$$\frac{(x_0 - b_1)^2 + b_2^2}{2b_2} \leq y_0 \leq \frac{(x_0 - a_1)^2 + a_2^2}{2a_2}.$$

On en déduit que les polynômes

$$P_1 = \frac{1}{2b_2}((X - b_1)^2 + b_2^2) \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2a_2}((X - a_1)^2 + a_2^2)$$

vérifient les propriétés requises.

30-b $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. — Les fonctions polynômes associées à P_1 et P_2 étant continues, on a $P_1(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_1(x)$ et $P_2(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_2(x)$. Les inégalités :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad P_1(x_n) \leq y_n \leq P_2(x_n),$$

assurent que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

30-c Unicité demandée. — La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut considérer μ l'une de ses valeurs d'adhérence.

Il existe donc une suite extraite $(y_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de limite μ . Les fonctions d_A et d_B sont continues car lipschitziennes et l'on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad d_A(x_{\psi(n)}, y_{\psi(n)}) = d_B(x_{\psi(n)}, y_{\psi(n)}).$$

Un passage à la limite conduit donc à $d_A(x, \mu) = d_B(x, \mu)$ et par suite $\mu = \varphi_{A,B}(x)$.

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et admet $\varphi_{A,B}(x)$ pour unique valeur d'adhérence, d'où le résultat demandé.

30-d Continuité de $\varphi_{A,B}$. — La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et admet $\varphi_{A,B}(x)$ pour unique valeur d'adhérence. D'après le résultat vu en **29**, on a $y_n = \varphi_{A,B}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi_{A,B}(x)$, ce qui assure la continuité de $\varphi_{A,B}$ au point x , propriété vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

31 Exemple demandé. — On prend $A = \{(0, 1)\}$ et B l'axe d'équation $y = -1$. La courbe médiatrice est la parabole d'équation $y = x^2/4$ et donc $\varphi_{A,B} : x \mapsto \frac{x^2}{4}$. La fonction $\varphi_{A,B}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à dérivée non bornée, donc elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

32-a Compacité de Γ' . — Le graphe Γ' est compact comme l'image du compact I par l'application continue $x \mapsto (x, \varphi_{A,B}(x))$.

32-b Existence de R_0 . — L'application d_A est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc elle est bornée sur le compact Γ' , d'où le résultat.

32-c Existence de R . — Notons S la boule fermée de rayon R_0 , centrée à l'origine. L'application définie sur le compact $\Gamma' \times S$ par $(m, u) \mapsto m + u$ est continue donc est bornée. L'existence du réel R en découle.

33 Propriétés de K_A et K_B . — Les ensembles K_A et K_B sont compacts comme intersection d'un fermé et d'un compact.

Tout disque fermé de rayon R_0 centré sur Γ' rencontre A et B puis est contenu dans $B_F(0, R)$. Il en résulte que K_A et K_B sont non vides. En outre, on a $K_A \subset A \subset \mathcal{P}^+$ et $K_B \subset B \subset \mathcal{P}^-$.

Introduisons x_0 un point de I et posons $m_0 = (x_0, \varphi_{A,B}(x_0))$. Il existe $(a_0, b_0) \in A \times B$ tel que

$$d_A(m_0) = d(m_0, a_0) = d_B(m_0) = d(m_0, b_0).$$

La définition de R assure que $(a_0, b_0) \in K_A \times K_B$ puis que $d_A(m_0) = d_{K_A}(m_0)$ et $d_B(m_0) = d_{K_B}(m_0)$.

On en déduit que m_0 est sur la ligne médiatrice de K_A et K_B et que Γ' est le graphe de la ligne médiatrice de K_A et K_B sur I .

34 ψ est lipschitzienne sur J . — Si Γ est le graphe d'une fonction dans $\mathcal{R}_\theta$, où l'on a choisi $\delta(\theta)$ comme premier axe, on en déduit que Γ ne présente aucune corde dans une direction perpendiculaire à $\delta(\theta)$, pour tout

$\theta \in]-\rho, \rho[$. Cela impose alors que l'on a $0 < \rho < \frac{\pi}{2}$. On en déduit que la pente d'une corde de Γ est contenue dans l'intervalle $[-\cotan(\rho), \cotan(\rho)]$ et que ψ est k -lipschitzienne sur J avec $k = \cotan(\rho)$.

35 $\varphi_{A,B}$ est lipchitzienne sur I . — Le résultat précédent a permis de se ramener au cas où en plus A et B sont compacts, ce que nous supposons dans toute cette question.

On peut par translation se ramener au cas où A et B sont contenus dans le demi-plan

$$\{(x, y) \in \mathcal{P} ; x > 0\}.$$

Il est facile de voir que l'on peut trouver deux rectangles pleins ouverts (voir figure 3)

$$\mathcal{R}_A = \{(x, y) \in \mathcal{P} ; 0 < \alpha_A < x < \beta_A, 0 < \lambda_A < y < \mu_A\} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{R}_B = \{(x, y) \in \mathcal{P} ; 0 < \alpha_B < x < \beta_B, \lambda_B < y < \mu_B < 0\}$$

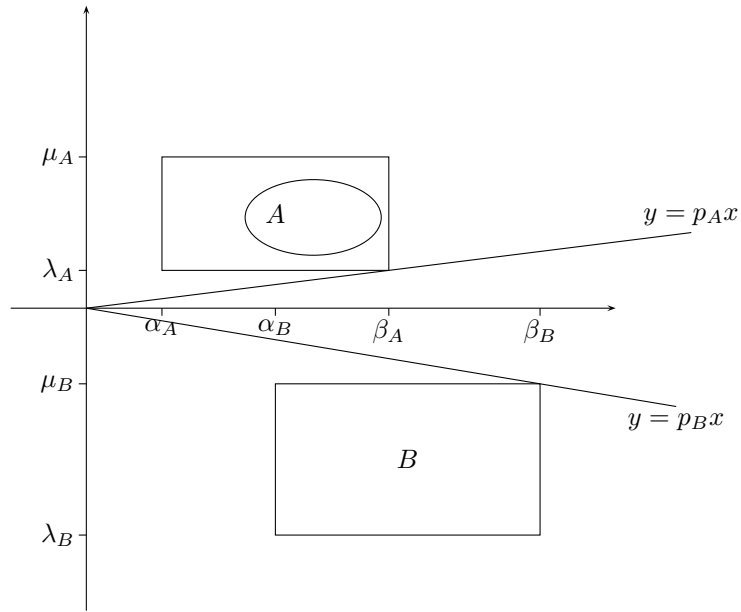


Figure 3

contenant respectivement A et B .

La droite $\delta(p)$ passant par l'origine dont la pente est $p \in [p_B, p_A]$, où

$$p_A = \frac{\lambda_A}{\beta_A} \quad \text{et} \quad p_B = \frac{\mu_B}{\beta_B},$$

sépare au sens stricte A et B , c'est-à-dire délimite deux demi-plans ouverts contenant respectivement A et B , de manière analogue à l'axe des abscisses. La ligne médiatrice de A et B est alors le graphe d'une fonction dans tout repère orthonormé directe où l'on a choisi $\delta(p)$ comme premier axe, pour tout $p \in [p_B, p_A]$. Le résultat est alors une conséquence de la propriété établie dans la question précédente.

Partie IV

36-a Premier résultat. — Notons $a = (0, a_1)$ et $B = [\alpha, 0] \times [\beta, \gamma]$ où $\alpha < 0$ et $\beta < \gamma < 0$.

On peut alors introduire deux sommets $b_1 = (\alpha, \gamma)$, $b_2 = (0, \gamma)$ du rectangle B , la droite $\Delta_\gamma = (b_1 b_2)$ puis δ_{a, b_1} et δ_{a, b_2} les médiatrices respectives des segments $[a, b_1]$ et $[a, b_2]$. (voir figure 4)

On voit facilement que les points situés au dessous de Δ_γ , à gauche de b_1 (resp. à droite de b_2) restent strictement sous les médiatrices δ_{a, b_1} et δ_{a, b_2} . Ces points sont donc strictement plus proche de B que de a et ne sont pas sur $\Gamma_{A,B}$.

Enfin si m est un point situé sous le segment $[b_1, b_2]$, toute arête qui joint m à a rencontre $[b_1, b_2]$ et donc

vérifie $d_B(m) < d_A(m)$. Le résultat en découle.

36-b Détermination de $\Gamma_{A,B}$. — Ce qui précède montre que $\Gamma_{A,B}$ est située au dessus de Δ_γ .

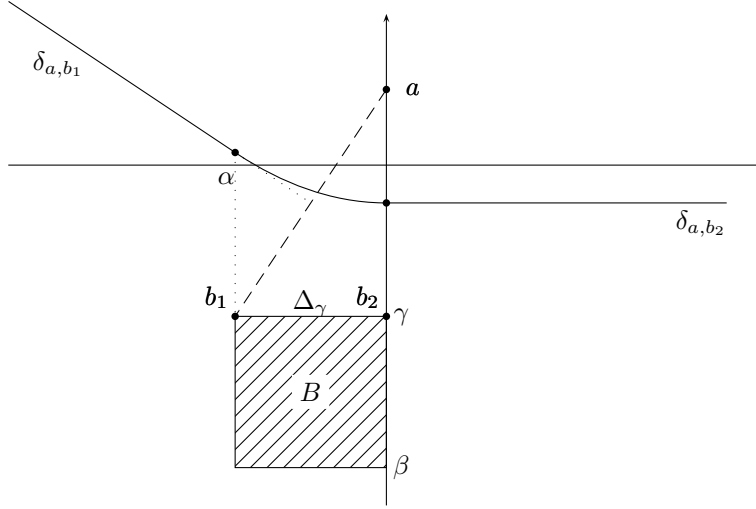


Figure 4

Avec les notations précédentes, on a successivement pour tout point $m = (x, y)$ situé au dessus de Δ_γ :

$$d_B(m) = \begin{cases} d(m, b_1), & \text{pour } x \leq \alpha \\ d(m, \Delta_\gamma), & \text{pour } \alpha \leq x \leq 0 \\ d(m, b_2), & \text{pour } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{voir figure 4})$$

Introduisons les fonctions φ_{a,b_1} , φ_{a,b_2} et $\varphi_{a,\Delta_\gamma}$ dont les graphes respectifs sont δ_{a,b_1} , δ_{a,b_2} et la parabole de foyer a et de directrice Δ_γ . Notons Λ l'enveloppe supérieure de ces trois fonctions.

L'expression de d_B sur ce demi-plan assure alors l'égalité $\Lambda = \Gamma_{A,B}$.

36-c Dérivabilité. — Seuls les points de raccord posent un problème.

La tangente en un point m de l'arc de parabole est la médiatrice de $[a, h]$, où h est la projection orthogonale de m sur $[b_1, b_2]$. On en déduit la dérivabilité de $\varphi_{A,B}$.

37 Équivalence. — La caractérisation vue en **III-28-e** donne pour tout $m = (x, y) \in \mathcal{P}$,

$$(d_A(m) \leq d_B(m)) \implies (y \geq \varphi_{A,B}(x)) \quad \text{et} \quad (d_A(m) \geq d_B(m)) \implies (y \leq \varphi_{A,B}(x)),$$

d'où le résultat demandé.

38-a $\varphi_{a,b} \leq \varphi_{a,B}$. — Considérons un réel x_0 , puis posons $y_0 = \varphi_{a,B}(x_0)$ et $m_0 = (x_0, y_0)$.

Pour tout élément $b \in B$, on peut écrire

$$d(a, (x_0, \varphi_{a,b}(x_0))) = d(b, (x_0, \varphi_{a,b}(x_0))) \geq d_B(x_0, \varphi_{a,b}(x_0))$$

donc par la caractérisation ci-dessus, on en déduit $\varphi_{a,b}(x_0) \leq y_0 = \varphi_{a,B}(x_0)$, d'où le résultat.

38-b $\sup_{b \in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{a,B}$. — Gardons les notations précédentes. L'ensemble B est fermé donc on peut introduire

b_0 un point de B tel que $d(m_0, b_0) = d_B(m_0)$. Alors on a $\varphi_{a,b_0}(x_0) = y_0$ d'où on en déduit

$$\sup_{b \in B} \varphi_{a,b}(x_0) = \max_{b \in B} \varphi_{a,b}(x_0) = \varphi_{a,B}(x_0),$$

et le résultat annoncé.

39 $\inf_{a \in A} \sup_{b \in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{A,B}$. — Considérons un réel x_0 , posons $y_0 = \varphi_{A,B}(x_0)$ et $m_0 = (x_0, y_0)$.

Pour tout $a \in A$, on a

$$d_B(x_0, \varphi_{a,B}(x_0)) = d(a, (x_0, \varphi_{a,B}(x_0))) \geq d_A(x_0, \varphi_{a,B}(x_0))$$

et donc par la caractérisation ci-dessus, on a

$$\varphi_{a,B}(x_0) \geq y_0 = \varphi_{A,B}(x_0).$$

On en déduit que pour tout $a \in A$, on a $\sup_{b \in B} \varphi_{a,b} \geq \varphi_{A,B}$ et l'existence de $\inf_{a \in A} \sup_{b \in B} \varphi_{a,b}$.

Par ailleurs, si a_0 est un point de A tel que $d(m_0, a_0) = d_A(m_0) = d_B(m_0)$, on a $\varphi_{a_0,B}(x_0) = y_0$. Il en découle

$$\inf_{a \in A} \varphi_{a,B}(x_0) = \min_{a \in A} \varphi_{a,B}(x_0) = \varphi_{A,B}(x_0),$$

et le résultat annoncé. L'autre égalité s'obtient de manière analogue.

40-a Existence de $p(t)$. — Considérons un réel t .

Traitons l'unicité. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, la droite d'équation : $x = ty + u$ s'appuie sur A à droite si et seulement si, pour tout $(x, y) \in A$, $x - ty \leq u$ avec au moins un cas d'égalité. Il en résulte qu'un réel u vérifie les propriétés requises si et seulement si $u = \max_{(x,y) \in A} (x - ty)$.

Traitons l'existence. L'application $(x, y) \mapsto x - ty$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble A est un compact non vide donc $p(t) = \max_{(x,y) \in A} (x - ty)$ est un réel bien défini. Le résultat demandé en découle.

40-b p est lipschitzienne. — Supposons que A et B soient contenus dans le carré $[-k, k]^2$, où $k > 0$. Nous allons établir que p est k -lipschitzienne, donc continue sur $\mathbb{R}$.

On peut écrire, pour tout $(x, y) \in A$ et $(s, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$x - sy = x - ty + (t - s)y \leq p(t) + |s - t|k,$$

ce qui assure $p(s) \leq p(t) + k|s - t|$, puis $p(s) - p(t) \leq k|s - t|$. En échangeant le rôle de s et t , il vient pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $|p(t) - p(s)| \leq k|s - t|$, d'où le résultat annoncé.

40-c Dernière propriété. — Considérons des réels s et t tels que $s < t$. Introduisons $(x_0, y_0) \in A$ tel que $p(t) = x_0 - ty_0$. Comme $y_0 > 0$, on peut écrire

$$p(t) = x_0 - ty_0 < x_0 - sy_0 \leq p(s),$$

ce qui assure que p est strictement décroissante. En outre, A étant compact, les hypothèses assurent l'existence de $\mu > 0$ tel que A soit situé au dessus de la droite $y = \mu$.

Pour tout réel t , il existe $(x(t), y(t)) \in A$ tel que $x(t) = ty(t) + p(t)$. En gardant les notations de **5-b**, on peut donc écrire

$$\begin{cases} p(t) \geq -k - t\mu, & \text{pour } t < 0 \\ p(t) \leq k - t\mu, & \text{pour } t > 0 \end{cases},$$

et par suite $p(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty$ et $p(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$.

Le théorème de la bijection assure que p est un homéomorphisme strictement décroissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

41 Existence de δ . — On introduit de manière analogue la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$q : t \mapsto \max_{(x,y) \in B} (x - ty).$$

Pour tout t réel, $q(t)$ est l'unique réel tel que la droite d'équation : $x = ty + q(t)$ s'appuie sur B à droite. On vérifie de même que q constitue un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Le problème équivaut à montrer l'existence d'un unique réel θ tel que $p(\theta) = q(\theta)$.

Les propriétés de p et q assurent que $q - p$ est un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Le résultat en est une conséquence directe.

42 Existence de $[m_A, m_B]$. — La définition de δ assure que $F_A = \delta \cap A$ et $F_B = \delta \cap B$ sont des compacts disjoints non vides de la droite δ .

On peut alors jusqu'à la fin de cette question se placer dans un repère orthonormal $\mathcal{R}_1$ dont l'axe des abscisses est δ , avec $F_A \subset \{(x_1, y_1) \in \mathcal{P} ; x_1 \leq 0\}$ et $F_B \subset \{(x_1, y_1) \in \mathcal{P} ; x_1 \geq 0\}$.

Le compact F_A de la droite δ admet un unique point d'abscisse maximale $m_A = (a_A, 0)$ et le compact F_B

admet un unique point d'abscisse minimale $m_B = (b_B, 0)$.

On peut donc écrire pour tout point $a = (a_1, 0)$ de F_A et $b = (b_1, 0)$ de F_B ,

$$d(a, b) = b_1 - a_1 \geq b_B - a_A = d(m_A, m_B),$$

avec égalité si et seulement si $a = m_A$ et $b = m_B$. Le segment $[m_A, m_B]$ vérifie les propriétés requises.

43 δ' est asymptote à $\Gamma_{A,B}$. — Pour $(a, b) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{P}^-$, notons $\delta_{a,b}$ la médiatrice du segment $[a, b]$ et $p_{a,b}$ sa pente. La droite δ' admet une équation du type : $y = ux + v$, avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Fixons $\varepsilon > 0$ un réel assez petit, b_ε le point de δ tel que celui-ci reste contenu dans $\mathcal{P}^-$ et tel que Δ_ε la droite d'équation $y = ux + v + \varepsilon$ soit la médiatrice du segment $[m_A, b_\varepsilon]$. (voir figure 5)

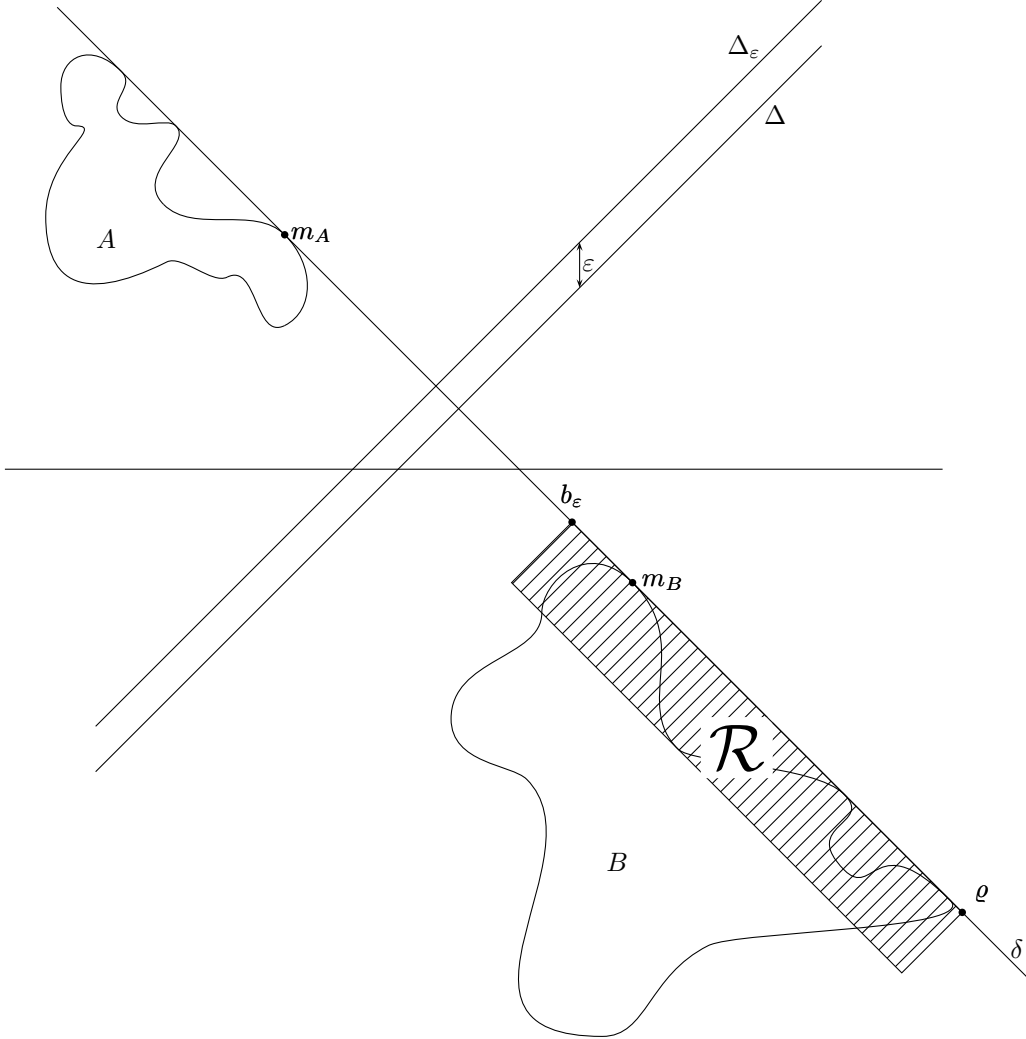


Figure 5

Considérons à gauche de δ dans $\mathcal{P}^-$, un rectangle plein $\mathcal{R}$ dont l'un des cotés est un segment $[b_\varepsilon, \varrho]$ de δ , contenant $\delta \cap B$ dans son intérieur. On a déjà

$$\varphi_{A,B} \leq \varphi_{m_A,B} = \sup_{b \in B} \varphi_{m_A,b}.$$

Pour un point $b \in \mathcal{R} \cap B$, on peut écrire

$$\varphi_{m_A,b} \leq \sup_{b' \in \mathcal{R}} \varphi_{m_A,b'} = \varphi_{m_A,\mathcal{R}}.$$

D'après la question 36, il existe un réel $\eta_1 \geq 0$ tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x \geq \eta_1) \implies \varphi_{m_A,\mathcal{R}}(x) = ux + v + \varepsilon.$$

Par ailleurs, notons K_ϱ l'adhérence de $B \setminus \mathcal{R}$. D'après le choix du rectangle $\mathcal{R}$, K_ϱ est un compact de $\mathcal{P}$ qui ne rencontre pas δ . Supposons que K_ϱ est non vide.

Alors pour $b \in K_\varrho$, on vérifie que $p_{m_A,b} < p_{m_A,m_B}$ puis $\delta_{m_A,b}$ rencontre Δ_ε en un unique point ϱ_b . En particulier, pour tout $b \in K_\varrho$, si $\varrho_{b,1}$ est l'abscisse de ϱ_b dans $\mathcal{R}$, on a :

$$(\forall x \geq \varrho_{b,1}), \quad \varphi_{m_A,b}(x) \leq ux + v + \varepsilon.$$

L'application $b \mapsto \varrho_{b,1}$ étant clairement continue sur K_ϱ , on peut définir $\eta_2 = \max_{b \in K_\varrho} \varrho_{b,1}$.

On a alors, en posant $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$, (si K_ϱ est vide, on pose $\eta = \eta_1$)

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x \geq \eta) \implies \varphi_{A,B}(x) \leq ux + v + \varepsilon.$$

En échangeant les rôles de A et B , on obtient de manière analogue l'existence d'un réel $\eta' \geq 0$ tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x \geq \eta') \implies \varphi_{A,B}(x) \geq ux + v - \varepsilon,$$

ce qui assure $\varphi_{A,B}(x) - (ux + v) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et le résultat annoncé.

RÉFÉRENCE

Michel Wirth (professeur honoraire de mathématiques au lycée Charlemagne de Paris) :

Courbe médiatrice de deux fermés

Chapitre 4

Rapport sur les épreuves orales

Les épreuves orales ont pour objectif « d'évaluer la capacité de concevoir, de mettre en œuvre et d'analyser l'enseignement d'une question mathématique donnée », ainsi que l'énonce l'arrêté définissant les épreuves du concours.

Elles supposent une solide préparation car il faut savoir, sur un sujet précis, rassembler et structurer ses connaissances en vue d'exposer les notions mathématiques afférentes, de proposer des applications et des exemples illustratifs, de sélectionner des exercices formateurs et adaptés. Pour cela, les candidats sont notamment encouragés à faire de nombreux exercices d'entraînement afin d'acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu'ils n'ont pas l'occasion d'enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés dont la liste est donnée au chapitre 5. À ce propos, il est vivement déconseillé d'utiliser sans recul les ouvrages livrant des leçons « prêtes à l'emploi ». D'une part, parce que le but de l'épreuve orale est précisément de montrer sa propre capacité à structurer l'exposé d'une question donnée, ce qui suppose souvent de comparer plusieurs ouvrages et de faire des choix réfléchis, d'autre part, parce que le jury connaît parfaitement ces ouvrages, ce qui l'amène souvent à s'assurer de la bonne maîtrise par les candidats des passages délicats et bien identifiés par lui. Enfin, la préparation des candidats à l'oral ne doit pas se limiter à la seule étude des sujets proposés car les questions du jury portent sur tout le programme et abordent des notions connexes.

Le déroulement des épreuves orales n'a pas évolué en 2018 et sera reconduit en 2019.

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début des opérations (accueil, consignes pratiques, vérification d'identité et tirage du sujet ; il est recommandé par sécurité de se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu, sauf exception, sur deux jours consécutifs y compris dimanches et jours fériés. À leur première épreuve orale (épreuve d'exposé), les candidats tirent une enveloppe contenant soit deux sujets (au choix) d'algèbre et géométrie soit deux sujets (au choix) d'analyse et probabilités. Pour leur seconde épreuve orale (exemples et exercices), ils tirent une enveloppe contenant deux sujets (au choix) dans le domaine complémentaire (analyse et probabilités si le domaine de l'exposé était en algèbre et géométrie et vice-versa). Outre l'accès libre à la bibliothèque de l'agrégation (cf. liste des ouvrages chapitre 6), les candidats bénéficient de ressources numériques dans la salle de préparation : programmes scolaires et documents ressources, rapport du jury, programme du concours, photocopies numériques¹. Ils ont également la **possibilité d'apporter leurs propres ouvrages sous réserve que ces derniers soient commercialisés**² avec un numéro

1. Liste publiée à l'adresse suivante : <http://agrprint.agreg.org/accueil.html>

2. Les impressions de livres numériques ne sont pas autorisées.

ISBN et qu'ils ne comportent aucune annotation, aucun surlignage, aucun marque page etc., faute de quoi ils pourraient être suspectés de tentative de fraude. Les candidats sont invités à bien s'en assurer avant de rejoindre le centre d'épreuves.

Dans la salle de préparation, chaque candidat dispose d'un espace numérique de travail avec les ressources et logiciels prévus (*cf. infra* 4.1.2). Pour cela, des identifiants de connexion lui sont communiqués lors du tirage des sujets. Tous les fichiers qu'il crée sont enregistrés sur le réseau et, sous réserve de s'être déconnecté avant de quitter la salle de préparation, le candidat peut les retrouver dans la salle de jury en se reconnectant au réseau.

4.1 Considérations générales

Il appartient aux candidats de bien prendre connaissance des conditions de passation de chacune des épreuves orales (*cf. infra*), et notamment du fait qu'elles sont structurées en trois temps bien distincts et limités en durée : un temps de présentation ou d'exposé (avec notes), un temps de développement (sans notes) et un temps réservé aux questions du jury. Pendant les deux premières parties, le jury n'intervient pas, sinon en comptable du temps. À ce propos, beaucoup trop de candidats gèrent difficilement le temps qui leur est imparti et nombreux sont ceux qui ne parviennent pas au bout du développement par manque de maîtrise ou pour avoir choisi une situation trop calculatoire, ce qui est souvent périlleux.

Les candidats doivent, dans la mesure du possible, faire tenir toutes leurs traces écrites (présentation et développement) sur l'espace du tableau sans rien effacer, quitte à écrire plus petitement. Ils peuvent recourir à quelques abréviations mais sans sacrifier à la rigueur ; en particulier, les énoncés des théorèmes et des définitions doivent être précis et complets, les quantificateurs ou connecteurs logiques doivent être rigoureusement utilisés.

Par ailleurs il convient de lire très attentivement le sujet et de bien en délimiter le périmètre pour éviter aussi bien des oublis que des hors sujets. Plusieurs candidats confondent « exemples » et « applications », et trop souvent les applications proposées ne sont en fait que des illustrations de la notion.

Enfin, certains candidats se découragent pendant le temps de préparation, voire abandonnent. C'est dommage car, comme indiqué précédemment, l'agrégation interne est un concours difficile qui se prépare sur plusieurs années et toute expérience de l'oral est toujours formatrice.

4.1.1 Critères d'évaluation

Le jury fonde son évaluation sur un ensemble de critères variés permettant d'apprécier à leur juste valeur les prestations des candidats. Il est particulièrement attentif :

- à la maîtrise mathématique du sujet :
 - maîtrise des contenus afférents au sujet et cela au niveau attendu par le concours ;
 - exactitude et précision des énoncés des définitions, théorèmes ou propriétés ;
 - rigueur des démonstrations, maîtrise des raisonnements logiques, mise en évidence de l'utilisation des hypothèses ;
 - capacité à mobiliser ses connaissances mathématiques en vue de résoudre un problème ou d'expliquer un phénomène ;
 - mise en lien des différentes idées et notions évoquées ;

- etc.
- à la pertinence de la présentation au regard du sujet donné :
 - bonne couverture du thème avec un réel contenu mathématique et sans hors sujets ;
 - niveau auquel le candidat choisit de se placer (un niveau trop élémentaire est sanctionné de même qu'un niveau trop élevé si mal maîtrisé) ;
 - cohérence du plan et des articulations entre les parties et notions présentées ;
 - choix du développement proposé ;
 - diversité, richesse, progressivité des exercices retenus ;
 - etc.
- aux qualités pédagogiques :
 - clarté de l'expression orale ;
 - capacité à motiver ses choix et ses actions, à expliquer clairement les raisons de sa démarche ;
 - gestion du temps ;
 - capacité à communiquer efficacement en se servant de différents supports (tableau, écran de projection) ;
 - présentation du tableau, organisation des calculs, choix des notations, etc.
 - capacités d'interaction avec le jury (écoute, réactivité, prise d'initiatives, capacité à mobiliser ses connaissances et à rectifier une erreur etc.) ;
 - utilisation convaincante, le cas échéant, des outils numériques ;
 - etc.

4.1.2 Usage des moyens informatiques

Les mathématiques d'aujourd'hui utilisent largement les outils informatiques, qu'il s'agisse de logiciels prêts à l'emploi ou d'algorithmes résolvant des problèmes de manière effective. Cela modifie très sensiblement les conditions d'exercice du métier d'enseignant : d'une part, certaines tâches techniques (longs calculs, tracés de courbes, résolutions approchées de problèmes, etc.) sont facilitées par des logiciels spécialisés et, d'autre part, certains logiciels interviennent couramment comme outils pédagogiques (représentation dynamique de situations géométriques, simulation d'expériences aléatoires etc.). Enfin, rappelons que les professeurs de mathématiques ont vocation, à tous les niveaux de la scolarité, à participer à l'enseignement d'algorithmique et de programmation proposé au collège et au lycée ainsi qu'à celui d'informatique inscrit dans les maquettes de formation des classes préparatoires.

C'est dans cet esprit que des moyens informatiques sont mis à disposition pour les deux épreuves orales afin que les candidats puissent valoriser leurs compétences dans ce domaine.

La liste des logiciels disponibles peut-être consultée sur le site du jury à l'adresse suivante :

<http://agreg.org/interne/logiciels.html> et les candidats peuvent télécharger (sur le site : <http://clefagreg.dnsalias.org>) un système très voisin de celui qui leur sera proposé à la prochaine session et qui tient entièrement dans une clé USB. Il est en effet essentiel d'avoir une certaine familiarité avec les logiciels mis à disposition afin d'être libéré des préoccupations techniques pour exploiter leurs apports pédagogiques.

Une fois encore à la session 2018, on a constaté une faible utilisation des outils numériques alors même que plusieurs sujets ont une dimension algorithmique évidente qui gagnerait à être illustrée informatiquement. Le jury regrette notamment des usages peu convaincants ou assez pauvres qui se limitent à déléguer à la machine un calcul plus ou moins difficile utilisant une fonction prédéfinie du

logiciel utilisé. Il convient en effet que les illustrations algorithmiques ou logicielles apportent une réelle plus-value au sujet traité, et ne se limitent pas à une suite d'actions de type « presse-bouton ».

La présentation effectuée par le candidat ne doit être ni la description factuelle d'une succession d'actions ou de lignes de code ni la démonstration d'une quelconque virtuosité technique ou performance matérielle. Le jury attend surtout la mise en évidence du ou des liens entre les mathématiques et les illustrations informatiques ou logicielles proposées. Une animation ou un programme, si convaincants soient-ils, ne constituent pas une preuve mathématique et ne peuvent en aucun cas tenir lieu de développement lors de la deuxième partie de l'épreuve. Concernant la présentation des algorithmes, on pourra se contenter d'une rédaction dans un pseudo-langage en français et expliquer comment a été faite l'implantation en machine. À ce propos, il est utile de prévoir des commentaires qui facilitent la lecture du code et permettent de valoriser le travail du candidat, même s'il demeure des erreurs de syntaxe qui empêchent le fonctionnement du programme (la programmation est un art qui peut échouer sur des détails minimes). Le jury n'attend pas une programmation aboutie avec tous les raffinements esthétiques possibles mais seulement de voir fonctionner un algorithme pour en montrer l'efficacité ou les limites en temps de calcul, ou encore de voir, au travers d'une animation, l'effet de certains paramètres qu'on peut faire varier de façon dynamique.

Enfin, les candidats doivent veiller à limiter leur temps de préparation et de présentation sur cet aspect des choses, et à intégrer leurs illustrations informatiques aux deux premiers temps de l'épreuve orale, sans possibilité de déborder sur le temps consacré aux questions du jury.

4.2 L'épreuve orale d'exposé

4.2.1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve orale d'exposé se déroule en trois temps :

- présentation du plan (durée maximale de **15 minutes**) ;
- développement d'un élément du plan choisi par le candidat (durée maximale de **15 minutes**) ;
- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

4.2.2 Choix des sujets

Le jury regrette que les leçons de géométrie soient toujours autant évitées par les candidats, comme le confirme la liste ci-dessous des leçons qui ne sont presque jamais retenues quand elles figurent dans un couplage (moins de 10% des occurrences).

Sujets très peu choisis	
119	Utilisation des nombres complexes en géométrie.
123	Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications.
169	Structures quotients dans divers domaines de l'algèbre. Applications.
254	Algorithmes d'approximation du nombre π .
256	Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.
258	Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
262	Étude métrique des courbes planes.
265	Inversion locale, difféomorphismes. Applications.

À l’opposé, les leçons suivantes sont presque toujours choisies lorsqu’elles sont tirées (dans plus de 80% des cas).

Sujets très fréquemment choisis	
107	Dimension d’un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d’une famille de vecteurs.
110	Polynômes d’endomorphismes en dimension finie. Applications.
113	Déterminants. Applications.
114	Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d’une matrice. Applications. Illustration algorithmique.
120	Endomorphismes symétriques d’un espace vectoriel euclidien. Applications.
143	Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
156	Valeurs propres. Recherche et utilisation.
159	Algorithme d’Euclide dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.
163	Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
202	Séries à termes réels positifs. Applications.
203	Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
204	Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
210	Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
212	Série de Fourier d’une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
217	Fonctions convexes d’une variable réelle. Applications.
218	Différentes formules de Taylor pour une fonction d’une variable réelle. Applications.
223	Intégrale d’une fonction dépendant d’un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
244	Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité
	...

4.2.3 Plan

Il s’agit de présenter les notions et les principaux résultats liés au sujet. C’est un exercice de synthèse qui suppose de savoir mettre en évidence les articulations entre les objets présentés et de bien faire ressortir les enchaînements d’idées. Ce ne doit pas être un catalogue de définitions et de résultats sans véritables liens entre eux.

Il est inutile de détailler les notations et définitions trop élémentaires, et de trop s’attarder sur les prérequis, afin de disposer d’un temps suffisant pour aborder la partie consistante et centrale du sujet. Les candidats peuvent supposer une certaine familiarité des examinateurs avec les notions abordées et les ouvrages qui les traitent, et éviter ainsi les listes interminables de propriétés évidentes. Il convient d’autant plus d’y être attentif que le sujet est *a priori* long, comme par exemple pour la leçon 230 (Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples,) et savoir faire des choix clairs pour que la présentation aborde bien le cœur du sujet. De même, pour la leçon 143 (Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.), il faut éviter de passer trop de temps sur la partie construction pour ne pas risquer de voir l’exposé culminer sur un énoncé élémentaire relatif à la division euclidienne

Il n'est pas nécessaire de tout écrire en détail. En revanche, les théorèmes importants ou les propriétés centrales du sujet doivent être énoncés avec précision (hypothèses, quantificateurs existentiels ou universels ...).

Insistons aussi sur le fait que le plan doit être cohérent sur l'ordre de présentation des différentes notions ou théorèmes. Il doit être sans cercle vicieux et doit refléter les capacités de synthèse que l'on est en droit d'attendre d'un professeur de mathématiques. Il faut savoir prendre du recul et souligner oralement les liens entre les différents résultats présentés. Aussi, la recopie linéaire d'un chapitre d'un ouvrage n'est pas souhaitable. Par ailleurs, il n'est pas indispensable, sur certaines leçons, d'être exhaustif. Il est en revanche très apprécié de fournir des exemples et contre-exemples des propriétés ou théorèmes cités. De même, les candidats sont invités, lorsque c'est pertinent, à proposer des applications, même si cela n'est pas explicitement demandé dans le libellé du sujet.

Enfin, il faut s'employer à répondre précisément à la question posée et à bien adapter le plan aux intitulés des sujets. Ainsi, le jury a regretté que les leçons 151 (Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.), 156 (Valeurs propres. Recherche et utilisation.), 163 (Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.) et 110 (Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.) donnent lieu à des plans identiques. Dans le même registre, il convient de bien centrer le traitement du sujet sur ce qu'il a de spécifique. Ainsi, les sujets 167 (Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.) et 213³ (Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π .) doivent-ils être bien distingués. Enfin, il n'est pas raisonnable de voir les exposés de probabilités systématiquement dévier vers des développements d'analyse avec des calculs d'intégrales ou de séries.

Une motivation, même orale, des notions fondamentales introduites est bienvenue, tout comme les exemples qui permettent d'illustrer les résultats théoriques. Le jury apprécie toute application dans des domaines variés témoignant d'une solide maîtrise mathématique et d'une bonne culture scientifique du candidat. Attention cependant à éviter le bavardage en citant hors contexte et de façon vague des applications scientifiques mal connues du candidat.

4.2.4 Développement

Le développement consiste à détailler et exposer une situation mathématique significative et importante de la leçon (souvent la démonstration d'un théorème), et figurant explicitement dans le plan. Il se fait sans notes, celles-ci pouvant être consultées occasionnellement avec l'accord du jury (par exemple pour vérifier une hypothèse ou une notation). Il permet au jury d'apprécier les compétences mathématiques du candidat et sa capacité à effectuer une présentation vivante, claire et maîtrisée d'une question. Le développement ne doit pas se limiter à la « récitation » d'une démonstration apprise par cœur. Le candidat doit au contraire montrer qu'il domine son sujet en présentant le canevas de la démonstration, en annonçant avec précision les résultats intermédiaires qu'il cherche à établir et le type de raisonnement qu'il met en œuvre (raisonnement par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence, etc.), en indiquant les moments où interviennent les hypothèses, etc.

Le choix du développement revient au candidat et non aux examinateurs. Rappelons que ce choix est en soi un élément de l'évaluation. Le point développé doit être substantiel, consistant et au cœur du sujet. Ce n'est pas le cas, par exemple, du théorème/lemme de Bézout quand on a défini le PGCD au moyen des idéaux de $\mathbf{Z}$ ou de $\mathbf{K}[X]$. De même, il n'est pas admissible de démontrer un théorème

3. Ce sujet sera légèrement modifié en 2019 avec l'ajout des fonctions hyperboliques.

en admettant l'essentiel du contenu mathématique de sa preuve dans un lemme énoncé dans le plan et en se contentant de faire de simples vérifications. Le jury a également sanctionné dans la notation les candidats qui ont proposé la résolution d'un exercice élémentaire ou la présentation d'un exemple inconsistant. Ce n'est pas ce qui est attendu, outre le fait que cette pratique biaise la nature complémentaire des deux épreuves orales et pourrait s'interpréter comme une stratégie d'optimisation consistant à préparer des développements susceptibles d'être présentés aussi bien en exposé qu'en exercices. Enfin, certains candidats ont visiblement préparé des développements « passe-partout » qu'ils considèrent comme interchangeables entre plusieurs exposés mais qui s'avèrent souvent n'avoir qu'un lien très ténu avec le sujet choisi, ce qui est lourdement sanctionné par le jury.

4.2.5 Niveau de la leçon

Il convient d'éviter deux écueils : celui de se placer à un niveau trop élémentaire et celui de vouloir traiter des questions que l'on ne maîtrise pas ou mal. Il appartient au candidat de proposer un exposé en adéquation avec le niveau du programme de l'agrégation interne, en retenant des notions, théorèmes et exemples qu'il maîtrise.

Par ailleurs, se placer d'emblée dans un cadre plus vaste que celui qui est précisé dans l'intitulé du sujet n'est pas recommandé car c'est prendre le risque de ne pas développer des particularités spécifiques à la question posée ou de traiter des parties « hors sujet », inévitablement sanctionnées par le jury. Il est préférable, si on le souhaite, d'étendre les résultats présentés en fin d'exposé.

4.2.6 Questions du jury

Les questions du jury visent à s'assurer de la bonne compréhension et d'une maîtrise suffisante des notions présentées par le candidat. Elles permettent souvent de corriger les éventuelles imprécisions ou erreurs figurant dans le plan ou dans le développement. Elles peuvent aussi consister à appliquer un résultat de la leçon sur un exemple proposé par le jury. Elles ne sont pas posées dans le but de piéger les candidats et ne nécessitent que très rarement de longs arguments. Si le candidat n'a pas proposé d'exemple ou de contre-exemple, cela pourra lui être demandé à ce moment là de l'épreuve. De même, le candidat doit s'attendre à ce que le jury lui demande des justifications, voire des démonstrations, de points ou notions qu'il aura exposés.

Les capacités de recherche et d'interaction du candidat avec le jury sont particulièrement évaluées lors de ce temps de l'épreuve. Réfléchir à haute voix, reformuler la question posée, se placer dans un cas particulier quand on ne voit pas comment traiter le cas général, s'aider de figures ou de schémas sont autant d'attitudes qui sont valorisées par le jury.

4.3 L'épreuve orale d'exemples et exercices

L'épreuve d'exemples et exercices consiste à présenter une sélection de situations particulières d'enseignement sur un thème donné. Le candidat témoigne ainsi de sa maîtrise mathématique du sujet et de sa réflexion pédagogique relative à son enseignement.

4.3.1 Déroulement de l'épreuve

En réponse au sujet qu'il a retenu, le candidat propose trois à six exercices ou exemples dont il rédige l'énoncé sur des feuilles pré-imprimées qui lui sont remises. À l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les appariteurs et sont remises par le candidat aux examinateurs. **Le format du document préimprimé évoluera à partir de la session 2019 : la colonne destinée aux motivations et remarques est supprimée**, à charge pour le candidat de les noter sur sa feuille de préparation (laquelle reste à sa disposition pendant la phase de présentation).

L'épreuve orale se déroule en trois temps :

- présentation motivée de l'ensemble des exercices ou exemples sélectionnés par le candidat (durée maximale de **10 minutes**) ;
- résolution commentée d'un des exercices ou exemples au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de **15 minutes**) ;
- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

L'épreuve n'est pas censée représenter une séance devant une classe de collège ou de lycée ; des objectifs plus ambitieux et un rythme plus soutenu peuvent être adoptés sous réserve d'une bonne maîtrise des notions mathématiques sous-jacentes et d'une certaine qualité d'exposition.

L'attention des candidats est appelée sur les deux points suivants :

- la formulation d'un énoncé est un acte pédagogique et le candidat est invité à modifier ceux des ouvrages qu'il consulte, en fonction de l'objectif pédagogique qu'il se fixe. Ainsi, par exemple, des énoncés segmentés en de trop nombreuses questions ne demandant que des vérifications élémentaires ne sont pas adaptés à cette épreuve ;
- la démonstration d'une propriété du cours nécessite, si le candidat souhaite la proposer dans sa liste d'exercices ou d'exemples, un réel travail de transformation pédagogique pour qu'elle devienne un véritable exercice, au risque sinon de dévoyer le sens de cette épreuve en reprenant à l'identique des énoncés qui ont en fait toute leur place dans l'épreuve d'exposé.

Cette épreuve orale exige une réflexion transversale préalable sur les notions figurant au programme afin de pouvoir en présenter des illustrations variées. Elle demande du recul et il ne faut pas s'étonner de voir le jury demander le schéma général de résolution d'un exercice proposé par le candidat, sans en demander tous les détails : cela suppose de bien maîtriser les mathématiques sous-jacentes et exclut en particulier la recopie d'exercices trouvés à la hâte dans divers recueils.

Cette épreuve nécessite un important travail de préparation en amont. Le jury note qu'elle est moins bien réussie que l'épreuve d'exposé et qu'elle donne lieu à des notes inférieures (en moyenne 0,6 point sur 20).

4.3.2 Choix des sujets

Comme pour l'épreuve orale d'exposé, ce sont essentiellement les sujets de géométrie qui sont délaissés par les candidats, alors même qu'ils font écho à des notions enseignées par les professeurs du secondaire et qui pourraient être valorisées au concours.

Sujets très peu choisis	
325	Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
328	Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
330	Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.
339	Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
346	Exemples de problèmes modélisés par des graphes.
435	Exemples de modélisations de situations réelles en probabilités.
448	Exemples d'utilisation d'intervalles de fluctuation et d'intervalles de confiance.
451	Exemples d'applications des transformées de Fourier et Laplace.
452	Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.
455	Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.

Le tableau ci-dessous liste les sujets très fréquemment choisis (dans plus de 80% des couplages où ils figurent).

Sujets très fréquemment choisis	
301	Exercices sur les groupes.
302	Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.
310	Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
312	Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
314	Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
319	Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices. Illustration algorithmique.
348	Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
353	Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.
402	Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
403	Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
404	Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
405	Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
408	Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
410	Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.
413	Exemples d'applications des séries entières.
414	Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
417	Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.

4.3.3 Présentation motivée des exercices ou exemples

Il s'agit d'expliquer soigneusement les raisons qui ont conduit au choix des exercices et il est inutile de recopier au tableau les énoncés. Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est en expliquer la pertinence par des raisons d'ordre pédagogique ou mathématique (l'un n'excluant pas l'autre), préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique, etc.

Voici quelques éléments de motivations possibles :

Objectif : S'il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public, ceci doit être fait brièvement. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, etc. Insistons : cette présentation doit être concise.

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être mises en évidence. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées ou des questions intermédiaires constitue un aspect possible de la présentation des exercices. Il est important d'indiquer l'apport mathématique de chaque exercice choisi.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite, sans que jamais ne se dégage une quelconque méthode un peu générale : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Il serait bon que les candidats puissent dégager les idées, méthodes générales qui entrent en jeu même si elles sont illustrées dans les exercices sur des cas particuliers. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée, de même que l'indication de la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement. Dans tous les cas, il faut s'assurer que les exercices retenus sont en adéquation avec le sujet proposé et « balayent » effectivement l'ensemble du sujet.

Intérêt : Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Il est d'ailleurs bon de citer les concepts ou théorèmes sous-jacents. Lorsqu'il existe diverses méthodes ou outils pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples.

Originalité : Le choix d'un exercice ne doit pas se limiter au recyclage de quelques situations rabâchées.

Bien des candidats présentent très honorablement cette première partie de l'épreuve, mettant en valeur leurs compétences pédagogiques et leurs acquis professionnels, et motivant la sélection des exercices par la diversité des applications qu'ils mettent en évidence. Ils utilisent le tableau de manière efficace tout en captant l'attention des examinateurs.

Il convient néanmoins d'attirer l'attention sur les défauts observés, et de prodiguer quelques conseils. Trop souvent, les candidats se contentent de donner lecture de leurs énoncés en quelques minutes. D'autres pratiquent avec plus ou moins de conviction la stratégie du « remplissage », qui consiste à occuper au mieux le temps alloué en diluant la présentation de leurs exercices à grands traits de banalités. D'autres enfin se contentent d'énoncer quelques théorèmes en rapport avec les exercices : s'il peut être pertinent de situer le contexte mathématique et de mettre en évidence les notions ou théorèmes essentiels dans la résolution, il n'est pas judicieux de commencer la présentation par de longs rappels de cours, et encore moins de transformer la séance en un exposé de leçon. En outre, écrire *in extenso* au tableau les théorèmes ou propriétés à l'œuvre dans les exercices n'est pas nécessaire (à ce moment là de l'épreuve) et même déconseillé, au risque sinon de constituer une « antisèche » pour la résolution des exercices, ce qui est très peu apprécié du jury.

On attend des candidats qu'ils proposent des exercices réellement différents, par leurs domaines spécifiques ou bien par leurs méthodes de traitement, et non pas des habillages différents d'une seule et même idée. Il est bon de privilégier les exercices s'appliquant à des domaines variés. Il convient de présenter des exercices consistants (qui ne se résolvent pas de tête ou en cinq minutes) et d'éviter les exercices relevant d'une astuce qui sont souvent de peu d'intérêt. On préférera ceux donnant une méthode de résolution réutilisable et pédagogiquement efficace. Il convient aussi d'être vigilant sur les exercices ayant plusieurs méthodes de résolution, dont certaines peuvent les rendre élémentaires (même si celles-ci sont hors sujet dans le cadre de la séance présentée) : c'est un atout de savoir montrer au jury sa maîtrise de l'ensemble des outils qui pourraient être mobilisés sur un exercice. Enfin, on évitera les exercices très proches du cours, ou consistant à proposer la démonstration d'un théorème du cours, afin de bien différencier les deux épreuves orales (*cf. supra*). Bien évidemment, le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet : le hors sujet est sanctionné !

Revenons enfin, et à nouveau, sur un point évoqué dans les précédents rapports. Certains sujets ont un intitulé commençant par « Exercices faisant intervenir... » ou bien « Exercices illustrant l'utilisation ... » : il ne s'agit pas de proposer des exercices (parfois fort techniques) presque exclusivement centrés sur la notion concernée (nombres premiers, division euclidienne, trigonométrie, déterminants, ...), c'est-à-dire des exercices d'entraînement sur cette notion, mais plutôt de donner des exercices un peu plus variés où la notion évoquée peut jouer un rôle dans un autre domaine. De même, comme indiqué précédemment, il y a une différence entre des « illustrations d'une notion » et des « applications » de cette notion.

4.3.4 Résolution détaillée d'un exercice ou d'un exemple

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice ou exemple qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons, comme pour l'épreuve d'exposé, sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs, et qu'il constitue un élément de l'évaluation. Au cours de cette phase, tout comme de la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie.

Le jury a eu le plaisir d'assister à un bon nombre de prestations très honorables et parfois excellentes, reflétant une culture mathématique étendue et une bonne familiarité avec une diversité de techniques. Il convient néanmoins de mettre en avant certaines erreurs ou maladresses à éviter.

Il est très maladroit, et pénalisant, de choisir de développer un premier exercice très élémentaire (la résolution est supposée durer quinze minutes), même si on a donné une liste progressive et substantielle. Par exemple, pour le sujet 310 (Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.) il n'est pas raisonnable de proposer en développement le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre 3. Il n'est pas prudent non plus de s'engager dans la résolution d'un exercice d'une complexité mal mesurée et qui n'aboutira pas dans le temps imparti. Les exercices requérant de lourds calculs donnent souvent lieu à des présentations décevantes car les candidats ont du mal à en gérer la longueur et la technicité. Il convient, en pareil cas, d'exposer la démarche dans un premier temps puis d'approfondir les points les plus marquants ; le jury demandera, le cas échéant, des détails complémentaires.

On rappelle que les candidats doivent être capables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices.

Les candidats doivent aussi s'assurer que les énoncés des exercices qu'ils proposent ne comportent pas d'erreurs (cette situation déstabilise régulièrement des candidats trop confiants dans leurs livres).

4.3.5 Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Elles permettent souvent de corriger d'éventuels lapsus ou de mettre en évidence une faille dans la solution ou encore de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé.

Le candidat doit s'attendre aussi à être interrogé, au moins partiellement, sur la résolution de **chacun des exercices** qu'il propose. À défaut d'une solution détaillée, il peut lui être demandé les méthodes utilisées ou les différents enchaînements de la résolution.

Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, un choix d'exercices trop ambitieux risque d'élever le niveau des questions posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul. Il est en revanche attendu une maîtrise du calcul : le jury est surpris du temps qu'il faut à certains candidats pour effectuer des calculs élémentaires comme la factorisation de $X^3 + 8$ dans $\mathbf{R}[X]$ ou la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X+1)(2X+1)}$.

Pour terminer, soulignons que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances et compétences.

Chapitre 5

Liste des sujets d'oral

Pour la prochaine session, quelques sujets verront leur libellé légèrement modifié. Il s'agit notamment des sujets : 123 et 125 (l'expression « décomposition canonique » étant celle définie dans le programme), 201 et 202 (pour ces deux leçons le candidat peut proposer, s'il le souhaite, des applications), 208, 213 (ajout des fonctions hyperboliques), 230, 305, 306 et 319 (dans ces deux sujets il est bienvenu de proposer un ou deux exercices mettant en avant des aspects algorithmiques), 317 (ajout de « trigonalisable »), 309 (la proposition de se limiter aux corps de base $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ n'empêche pas le candidat de proposer des exercices sur d'autres corps), 345 (sujet plus large que précédemment dans lequel des exercices sur les triangles ont toujours toute leur place), 350, 430 (il s'agit non seulement de proposer des équations différentielles issues de domaines variés mais aussi de les étudier et de les résoudre) et 448 (sujet portant sur les nouveautés du programme : estimation ponctuelle et par intervalles de confiance).

Un nouveau sujet d'exposé est proposé : « Méthodes de chiffrement ou de codage. Illustrations ». Il remplace le sujet d'exemples et d'exercices numéro 349.

Leçons d'algèbre et géométrie

- 101** Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
- 102** Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
- 103** Anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
- 104** Nombres premiers. Propriétés et applications.
- 106** PGCD dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
- 107** Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
- 109** Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
- 110** Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
- 112** Changements de bases en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
- 113** Déterminants. Applications.
- 114** Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.

- 117 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
- 119 Utilisation des nombres complexes en géométrie.
- 120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.
- 121 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques.
- 123 Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications.
- 125 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique. Applications.
- 128 Barycentres. Applications.
- 131 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.
- 137 Droites et cercles dans le plan affine euclidien.
- 142 Utilisation de groupes en géométrie.
- 143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
- 144 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.
- 146 Coniques.
- 150 Diverses factorisations de matrices. Applications.
- 151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. (On supposera connues les notions de valeurs propres, vecteurs propres et sous-espace propres).
- 155 Systèmes d'équations linéaires. Applications.
- 156 Valeurs propres. Recherche et utilisation.
- 158 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 159 Algorithme d'Euclide dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.
- 163 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
- 165 Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.
- 166 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
- 167 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
- 168 Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines.
- 169 Structures quotients dans divers domaines de l'algèbre. Applications.
- 170 Méthodes de chiffrement ou de codage. Illustrations.

Leçons d'analyse et probabilités

- 201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.
- 202 Séries à termes réels positifs.
- 203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
- 204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
- 205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
- 206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
- 207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
- 208 Théorèmes de points fixes.
- 209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.

- 210** Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- 212** Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
- 213** Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre π .
- 215** Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
- 216** Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.
- 217** Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
- 218** Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
- 219** Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
- 220** Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.
- 221** Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.
- 223** Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
- 224** Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
- 225** Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.
- 227** Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Exemples.
- 228** Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.
- 229** Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
- 230** Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples.
- 231** Espérance, variance ; loi faible des grands nombres. Applications.
- 232** Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
- 235** Exponentielles de matrices. Applications.
- 237** Construction de l'intégrale et lien avec les primitives.
- 241** Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications. (Les définitions des notions de convergence sont supposées connues).
- 244** Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité...
- 249** Loi normale en probabilités et statistiques.
- 251** Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
- 254** Algorithmes d'approximation du nombre π .
- 256** Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.
- 257** Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels, ...
- 258** Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
- 260** Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application.
- 262** Étude métrique des courbes planes.
- 263** Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
- 264** Fonctions développables en série entière. Exemples et applications. (Les résultats relatifs aux séries entières sont supposés connus).

- 265** Inversion locale, difféomorphismes. Applications.
- 266** Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.
- 267** La fonction Gamma.

Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

- 301** Exercices sur les groupes.
- 302** Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.
- 304** Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
- 305** Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.
- 306** Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.
- 307** Exercices faisant intervenir des dénombrements.
- 309** Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles. On pourra se limiter aux corps de base $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- 310** Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
- 311** Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
- 312** Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
- 313** Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
- 314** Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
- 315** Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
- 317** Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
- 319** Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
- 321** Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
- 322** Exercices sur les formes quadratiques.
- 323** Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
- 325** Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
- 326** Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.
- 328** Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
- 330** Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.
- 334** Exercices sur les coniques.
- 339** Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
- 340** Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
- 345** Exercices sur les polygones.
- 346** Exemples de problèmes modélisés par des graphes.
- 348** Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
- 350** Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Aspects algorithmiques.
- 351** Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.
- 353** Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.
- 354** Exercices sur les cercles et les sphères.
- 355** Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.

356 Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.

357 Exercices utilisant le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Exemples et exercices d'analyse et probabilités

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.

405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.

407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

409 Exemples d'utilisation de polynômes en analyse.

410 Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.

412 Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.

413 Exemples d'applications des séries entières.

414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.

415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

417 Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.

418 Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.

421 Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Aspects algorithmiques.

422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.

423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.

426 Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes,

...

427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.

428 Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.

429 Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.

430 Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles issues de domaines variés (sciences expérimentales ou autres sciences).

431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.

432 Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.

434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.

435 Exemples de modélisations de situations réelles en probabilités.

436 Exemples d'applications de l'intégration par parties.

437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.

438 Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.

439 Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.

- 440 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
- 443 Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations $F(X) = 0$, X désignant une variable réelle ou vectorielle.
- 444 Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série. Aspects algorithmiques.
- 447 Exemples d'équations fonctionnelles.
- 448 Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
- 449 Exemples d'équations différentielles non linéaires.
- 451 Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.
- 452 Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.
- 453 Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.
- 454 Exemples d'applications de la notion de compacité.
- 455 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.

Chapitre 6

Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

La bibliothèque est commune avec le concours de l'agrégation externe, excepté pour les livres d'informatique théorique qui ne sont pas repris dans la présente liste. Seuls les livres d'algorithmique présentant un intérêt pour le concours interne ont été maintenus.

AABELSON H. SUSSMAN G. J. SUSSMAN J.	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS ISBN : 9780262010771
AEBISCHER B.	Géométrie	VUIBERT ISBN : 9782311002768
AEBISCHER B.	Analyse	VUIBERT ISBN : 9782311002751
AHUÉS M. CHATELIN F.	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON ISBN : 9782225817939
ALBERT L. Collectif	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT ISBN : 9782711786213
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	HACHETTE ÉDUCATION ISBN : 9782011712424
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD ISBN : 9782100045563
ALLOUCHE J. P. SHALLIT J.	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE ISBN : 9780521823326
AMAR E. MATHERON É.	Analyse complexe	CASSINI ISBN : 9782842250522
ANDLER M. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1A - Topologie	ELLIPSES ISBN : 9782729802002
ANDLER M. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1B - Fonctions numériques	ELLIPSES ISBN : 9782729802096
ANDLER M. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 2 - Suites et séries numériques	ELLIPSES ISBN : 9782729886168

ANDLER M. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 3 - Analyse fonctionnelle	ELLIPSES ISBN : 9782729888470
ANDLER M. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 5 - Algèbre générale, polynômes	ELLIPSES ISBN : 9782729802045
ANDLER M. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie	ELLIPSES ISBN : 9782729802053
ANDLER M. BLOCH J. D. MAILLARD B.	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES ISBN : 9782729802061
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER ISBN : 9780486682525
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in C	CAMBRIGDE ISBN : 9780521607650
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in Java	CAMBRIGDE ISBN : 9780521820608
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in ML	CAMBRIGDE ISBN : 9780521607643
ARIBAUD F. VAUTHIER J.	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA ISBN : 9782869110103
ARNAUDIES J-M. BERTIN J.	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome I	ELLIPSES ISBN : 9782729843083
ARNAUDIES J-M. BERTIN J.	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome II	ELLIPSES ISBN : 9782729845940
ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H.	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géomé- trie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD ISBN : 9782100031023
ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H.	Exercices résolus d'analyse tome 2	DUNOD ISBN : 9782100014712
ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H.	Cours de Mathématiques, 1. Algèbre	DUNOD ISBN : 9782040164508
ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H.	Cours de Mathématiques, 2. Analyse	DUNOD ISBN : 9782040165017
ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H.	Cours de Mathématiques, 3. Compléments d'analyse	DUNOD ISBN : 9782040165253
ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H.	Cours de Mathématiques, 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD ISBN : 9782040165505
ARNOLD A. GUESSARIAN I.	Mathématiques pour l'informatique	EDISCIENCE ISBN : 9782100492305
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations	SPRINGER UNIVSERSI- TEXT ISBN : 9783540404484
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS

ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY ISBN : 9782876470896
ARTIN M.	Algebra	PRENTICE HALL ISBN : 9780130047635
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2	PUF ISBN : 9782130392652
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN ISBN : 9782701121307
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	MASSON ISBN : 9782225826320
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	MASSON ISBN : 9782225840012
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON ISBN : 9782225790799
BAASE S. VAN GELDER A.	Computer algorithms, Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY ISBN : 9780201612448
BADOUEL E. BOUCHERON S. DICKY A. PETIT A. SANTHA M. WEIL P. ZEITOUN M.	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER ISBN : 9783540423416
BAJARD J.-C.	Exercices d'algorithmique	INTERNATIONAL THOM- SON ISBN : 9782841801053
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN ISBN : 9782705660932
BASIL B. PESKINE C.	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES ISBN : 9782841340002
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 1	MASSON
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 2	MASSON
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER ISBN : 9783540426745
BENDER C. ORSZAG S.	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL ISBN : 9780070044524
BENIDIR M. BARRET M.	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD ISBN : 9782100044320

BENOIST J. BOUALEM H. BROUZET R. CABOT A. CHABANOL M.L. FEJOZ J. LAZZARINI L.,MANSUY R. MESNAGER L. MESNAGER s. PENNEQUIN D. YGER A. ZARRABI M.	Mathématiques L2. Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	PEARSON EDUCATION ISBN : 9782744072253
BERCU B CHAFAI D.	Modélisation stochastique et simulation	DUNOD ISBN : 9782100513796
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN ISBN : 9782091917313
BERGER M.	Géométrie vivante	CASSINI ISBN : 9782842250355
BERGER M.	Géométrie, 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs	CÉDIC/NATHAN ISBN : 9782712407016
BERGER M.	Géométrie, 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères	CÉDIC/NATHAN ISBN : 9782712407014
BERGER M.	Géométrie, 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes	CÉDIC/NATHAN ISBN : 9782712407032
BERGER M.	Géométrie, 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques	CÉDIC/NATHAN ISBN : 9782712407040
BERGER M.	Géométrie, 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN ISBN : 9782712407059
BERGER M.	Géométrie, Index	CÉDIC/NATHAN ISBN : 9782712407067
BERGER M. BERRY J-P. PANSU P. SAINT RAYMOND X.	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN ISBN : 9782712407202
BERGER M. GOSTIAUX B.	Géométrie différentielle	ARMAND, COLIN
BERLINE N. SABBAH C.	Groupes finis, Journées mathématiques X-UPS 2000	EDITIONS DE L'X ISBN : 9782730207515
BHATIA R.	Matrix analysis	SPRINGER ISBN : 9780387948461
BICKEL P.J. DOKSUM K.A.	Mathematical statistics	PRENTICE HALL ISBN : 9780135641470
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE, PUBLICATIONS ISBN : 9780198534273
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF ISBN : 9782130322535

BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA ISBN : 9780883850222
BOISSONNAT J.-D. YVINEC M.	Géométrie algorithmique	EDISCIENCE ISBN : 9782840741121
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON ISBN : 9782225849923
BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C.	Optimisation numérique	SPRINGER ISBN : 9783540631835
BOUALEM H. BROUZET R. ELSNER B. KACZMAREK L. PENNEQUIN D.	Mathématiques L1. Cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés	PEARSON EDUCATION ISBN : 9782744072581
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III	HERMANN
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII	HERMANN
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Topologie générale, chapitres V à X	HERMANN
BOURGADE P.	Olympiades internationales de mathématiques	CASSINI ISBN : 9782842250874
BOUVIER A. RICHARD D.	Groupes	HERMANN ISBN : 9782705613838
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités et aux chaînes de Markov	SPRINGER ISBN : 9783540314219
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON ISBN : 9782225771989
BRIANE M. PAGES G.	Théorie de l'intégration, Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT ISBN : 9782711771264
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND, COLIN
BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J.	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE ISBN : 9780521312387
CABANE R. LEBOEUF C.	Algèbre linéaire, 1. Espaces vectoriels , Polynômes	ELLIPSES ISBN : 9782729887049
CABANE R. LEBOEUF C.	Algèbre linéaire, 2. Matrices et réduction	ELLIPSES ISBN : 2729890297
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux vol I	PUF ISBN : 9782130523529
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF ISBN : 9782130384656

CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	CASSINI ISBN : 9782842250539
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN ISBN : 9782705614492
CARTAN H.	Calcul différentiel	HERMANN ISBN : 9782705658793
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN ISBN : 9782705667023
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN ISBN : 9782705652159
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel	0
CARTON O.	Langages formels. Calculabilité et complexité	VUIBERT ISBN : 9782711720774
CASTI J.	Reality rules tome I	WILEY ISBN : 9780471570219
CASTI J.	Reality rules tome II	WILEY ISBN : 9780471577980
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL ISBN : 9780132114677
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe tome I	MIR ISBN : 9785030016287
CHAFAI D.	Probabilités. Préparation à l'agrégation interne	E-LIVRE ISBN : 9782954171005
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	EDITIONS DE L'X ISBN : 9782730212175
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2	MASSON ISBN : 9782225848858
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3	MASSON ISBN : 9782225853852
CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON ISBN : 9782225855160
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	CASSINI ISBN : 9782842250072
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 1	CASSINI ISBN : 9782842250706
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 2	CASSINI ISBN : 9782842250583
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 3	CASSINI ISBN : 9782842250829
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 3	CASSINI ISBN : 9782842250829
CHARPENTIER E. NILKOLSKI N.	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 4	CASSINI ISBN : 9782842251147
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON ISBN : 9782225809682
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG

CHOIMET D. QUEFFELEC H.	Analyse mathématique	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352107
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON ISBN : 9782225599726
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHRISTOL G. PILIBOSSIAN P. YAMMINE S.	Algèbre 1	ELLIPSES ISBN : 9782729845087
CHRISTOL G. PILIBOSSIAN P. YAMMINE S.	Algèbre 2	ELLIPSES ISBN : 9782729896898
CLAESSENS L.	Mes notes de mathématiques	E-LIVRE ISBN : 9782954093611
COGIS O. ROBERT C.	Au-delà des ponts de Königsberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT ISBN : 9782711753215
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY ISBN : 9780471101699
COLLET H. GIRARD B. PERRIER C.	Mathématiques BTS industriel	NATHAN ISBN : 9782091790886
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL ISBN : 9780412388002
COLMEZ P.	Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)	EDITIONS DE L'X ISBN : 9782730215879
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF ISBN : 9782130460299
CORI R. LASCAR D.	Logique mathématique, 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats	DUNOD ISBN : 9782100054527
CORI R. LASCAR D.	Logique mathématique, 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD ISBN : 9782100054534
CORMEN T. H. LEISERSON C. E. RIVEST R. L. STEIN C.	Introduction à l'algorithmique	DUNOD ISBN : 9782100039227
COTRELL M. GENON-CATALOT V. DUHAMEL C. MEYRE T.	Exercices de probabilités	CASSINI ISBN : 9782842250683
COURANT R. HILBERT D.	Methods of Mathematical Physics, Volume 1	JOHN WILEY ISBN : 9780471504474
COURANT R. HILBERT D.	Methods of Mathematical Physics, Volume 2	JOHN WILEY ISBN : 9780471504399
COUSINEAU G. MAUNY M.	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE ISBN : 9782840741145
COX D.	Galois theory	WILEY ISBN : 9780471434191
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY ISBN : 9780471504580

CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS, PUBLISHING ISBN : 9780852742600
DACUNHA-CASTELLE D. DUFLO M.	Exercices de Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	MASSON ISBN : 9872225779023
DACUNHA-CASTELLE D. DUFLO M.	Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	MASSON ISBN : 9872225745476
DACUNHA-CASTELLE D. REVUZ D. SCHREIBER M.	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES ISBN : 9782729823009
DANTZER J.-F.	Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse et probabilités. Cours et exercices corrigés	VUIBERT ISBN : 9782711740260
DAVID R. NOUR K. RAFFALI C.	Introduction à la logique, Théorie de la démonstration	DUNOD ISBN : 9782100067961
DE KONNINCK J.M. MERCIER A.	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352190
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER ISBN : 9782287004165
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD ISBN : 9782100044467
DELTHEIL R. CAIRE D.	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY ISBN : 9782876470500
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE ISBN : 9782706104213
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES ISBN : 9782729886469
DEMAZURE M.	Cours d'Algèbre	CASSINI ISBN : 9782842251277
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI ISBN : 9782842251277
DEMBO A. ZEITOUNI O.	Large deviations techniques and applications	SPRINGER ISBN : 9780387984063
DESCHAMPS WARUSFEL MOULIN RUAUD MIQUEL SIFRE	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 1ère année MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD ISBN : 9782100039319

DESCHAMPS WARUSFEL MOULIN RUAUD MIQUEL SIFRE	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 2ème année MP, PC, PSI	DUNOD ISBN : 9782100054121
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF ISBN : 9782130392149
DEVANZ C. ELHODAIBI M.	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	CASSINI ISBN : 9782842250737
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN ISBN : 9782705655006
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Éléments d'Analyse Tome 2	GAUTHIER-VILLARS ISBN : 9782876472120
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Fondements de l'analyse moderne	GAUTHIER-VILLARS ISBN : 9782876472112
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN ISBN : 9782705610401
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS ISBN : 9782040157159
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Pre- mière année	GAUTHIER-VILLARS ISBN : 9782100057702
DOWEK G. LEVY J.-J.	Introduction à la théorie des langages de pro- grammation	EDITIONS DE L'X ISBN : 9782730213332
DRAPER N.R. SMITH H.	Applied regression analysis	WILEY ISBN : 9780471170822
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie	VUIBERT ISBN : 9782711770878
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF ISBN : 9782130316688
DUGAC P.	Histoire de l'analyse., Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT ISBN : 9782711753116
DYM H. Mac KEAN H.P.	Fourier series and integrals	ACADEMICS PRESS ISBN : 9870122264519
EBBINGHAUS HERMES HIRZEBRUCH KOECHER LAMOTKE MAINZER NEUKIRSCH PRESTEL REMMERT	Les Nombres	VUIBERT ISBN : 9782711789016
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352084

EL KACIMI ALAOUI A. QUEFFÉLEC H. SACRÉ C. VASSALLO V.	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES ISBN : 9782729868352
ENGEL A.	Solutions d'expert vol. 1	CASSINI ISBN : 9782842250515
ENGEL A.	Solutions d'expert vol. 2	CASSINI ISBN : 9782842250553
EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes, Algèbre	CÉDIC/NATHAN
EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)	Exercices et problèmes, Analyse. Volume 1	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques, Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles	HATIER
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques, Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse	HATIER
EXBRAYAT J.M. MAZET P.	Notions modernes de mathématiques, Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. SOMINSKI I.	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. BEEF C.	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352008
FARAUT J. KHALILI E.	Arithmétique, Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES ISBN : 9872729890122
FELLER W.	An introduction to Probability theory & its applications, Volume 1	WILEY
FELLER W.	An introduction to Probability theory & its applications, Volume 2	WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON ISBN : 9782225804182
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 1	VUIBERT ISBN : 9782711721467
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 2	VUIBERT
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 3	VUIBERT
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 4	VUIBERT
FONTANEZ C. RANDE B.	Les clés pour les Mines	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352176
FRANCHINI J. JACQUENS J-C.	Mathématiques Spéciales, Algèbre	ELLIPSES ISBN : 9782729856571
FRANCINOUS. GIANELLA H.	Exercices de Mathématiques pour laagrégation Algèbre 1	MASSON ISBN : 9782225843662

FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI ISBN : 9782842250300
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 1 (seconde édition)	CASSINI ISBN : 9782842251321
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 2	CASSINI ISBN : 9782842251420
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 3	CASSINI ISBN : 9782842250928
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 1	CASSINI ISBN : 9782842251352
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 2	CASSINI ISBN : 9782842251413
FRANCINOU S. GIANELLA H. NICOLAS S.	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 3	CASSINI ISBN : 9782842250935
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN ISBN : 9782705614379
FRESNEL J. MATIGNON M.	Algèbre et Géométrie	HERMANN ISBN : 9782705680701
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER ISBN : 9780387946436
FULTON W.	Algebraic Topology	SPRINGER ISBN : 9780387943275
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI ISBN : 9782842250188
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 1	DUNOD
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 2	DUNOD
GAREY M. JOHNSON D.S.	Computers and Intractability	FREEMAN AND CO ISBN : 9780716710455
GARLING D.J.H.	Inequalities	CAMBRIDGE ISBN : 9780521699730
GATHEN J. GERHARD J.	Modern Computer algebra	CAMBRIDGE ISBN : 9780521826464
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER ISBN : 9783540640745
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	CASSINI ISBN : 9782842250232

GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON ISBN : 9782225853081
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON ISBN : 9782225831492
GODEMENT R.	Analyse mathématique 1	SPRINGER ISBN : 9783540632122
GODEMENT R.	Analyse mathématique 2	SPRINGER ISBN : 9783540634140
GODEMENT R.	Analyse mathématique 3	SPRINGER ISBN : 9783540661429
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. VAN LOAN C.F.	Matrix computations	WILEY ISBN : 9780801854149
GONNORD S. TOSEL N.	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation, Topologie et Analyse fonctionnelle	ELLIPSES ISBN : 9782729896942
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 1 - Algèbre	PUF ISBN : 9782130458357
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 2 - Topologie et analyse réelle	PUF ISBN : 9782130458364
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel	PUF ISBN : 9782130458494
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 4 - Géométrie affine et métrique	PUF ISBN : 9782130470274
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF ISBN : 9782130471318
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Algèbre	ELLIPSES ISBN : 9782729894320
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Analyse	ELLIPSES ISBN : 9782729844493
GRAHAM KNUTH	Concrete mathematics	ADDISON WESLEY ISBN : 9780201558029
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN ISBN : 9782705663339
GRANJON Y.	Informatique, Algorithmes en Pascal et en langage C	DUNOD ISBN : 9782100485284
GREUB W.	Linear Algebra	SPRINGER ISBN : 9780387901107
GRIMMET G. WELSH D.	Probability (an introduction)	OXFORD ISBN : 9780198532644
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY ISBN : 9780071139649
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE ISBN : 9780521585194
HABSIEGER L. MARTEL V.	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS

HAMMAD P. TARANCO A.	Exercices de probabilités	CUJAS ISBN : 9872254850707
HAMMER R. HOCKS M. KULISH U. RATZ D.	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER ISBN : 9783540591108
HARDY G.H. WRIGH E.M.	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HAREL D. FELDMAN Y.	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY ISBN : 9780321117847
HENNEQUIN P.L. TORTRAT A.	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 1	WILEY-INTERSCIENCE
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 2	WILEY-INTERSCIENCE
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352046
HIRSCH F. LACOMBE G.	Éléments d'analyse fonctionnelle	MASSON ISBN : 9782225855733
HOCHARD M.	Algèbre, analyse, géométrie	VUIBERT ISBN : 9782711771844
HOPCROFT J.E. MOTWANI R. ULLMAN J. D.	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY ISBN : 9780321210296
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352121
IRELAND K. ROSEN M.	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG ISBN : 9780387906258
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Man- suy)	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome I	FREEMAN AND Co
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome II	FREEMAN AND Co
KAHANE J.P. LEMARIE-RIEUSSET P.-G.	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI ISBN : 9782842250010
KERBRAT Y. BRAEMER J-M.	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. RITCHIE D.	Le langage C	DUNOD ISBN : 9782100487349
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 1 : Fundamental algorithms	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896831

KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 2 : Seminumerical algorithms	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896842
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896850
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography	SPRINGER ISBN : 9780387942933
KOLMOGOROV A. FOMINE S.	Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES ISBN : 9696748024722
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE ISBN : 9780521438490
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE ISBN : 9780521389914
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de mathématiques pour physiciens	CASSINI ISBN : 9782842250379
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI ISBN : 9782842250140
KUNG J.	Combinatorics	CAMBRIDGE ISBN : 9780521737944
LAAMRI EL HAJ	Mesures, intégration et transformée de Fourier, des fonctions	DUNOD ISBN : 9782100057009
LACOMME P. PRINS C. SEVAUX M.	Algorithmes de graphes	EYROLLES ISBN : 9782212113853
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF ISBN : 9782706106545
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON ISBN : 9782225821042
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 1	INTEREDITIONS ISBN : 9872729600011
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 2	INTEREDITIONS ISBN : 9872729600028
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	ELLIPSES ISBN : 9782729860097
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	CASSINI ISBN : 9782842251376
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES ISBN : 9782729818562
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES ISBN : 9782729878429
LAX P. D.	Functional analysis	WILEY ISBN : 9780471556046
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY

LE BRIS G.	Maple Sugar : Initiation progressive à Maple	CASSINI ISBN : 9782842250195
LEBOEUF C. GUEGAND J., ROQUE J.-L. LANDRY P.	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES ISBN : 2729887296
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. HÉMERY C.	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHMANN D. SACRE C.	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 1 : Topologie	MASSON ISBN : 9872225806689
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 3 : Intégration et sommation	MASSON ISBN : 9782225806797
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 4 : Analyse en dimension finie	MASSON ISBN : 9782225808784
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON ISBN : 9782225812262
LEHNING H. JAKUBOWICZ D.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 2 : Dérivation	MASSON ISBN : 9782225808760
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 1 - Algèbre 1	ELLIPSES ISBN : 9782729888330
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 2 - Algèbre et géométrie	ELLIPSES ISBN : 9782729888349
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 3 - Analyse 1	ELLIPSES ISBN : 9782729801531
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES ISBN : 9782729888357
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour A-A' : Algèbre	DUNOD
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour M-M' : Algèbre	DUNOD ISBN : 9782040070748
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 2 : Analyse	DUNOD ISBN : 9782040071356
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 3 : Géométrie et cinématique	DUNOD
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 4 : Équations différentielles, intégrales multiples	DUNOD ISBN : 9782040026066
LESIEUR L. MEYER Y. JOULAIN C. LEFEBVRE J.	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN ISBN : 9782200210397

LION G.	Algèbre pour la licence, Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT ISBN : 9782711789603
LIRET F.	Maths en pratique à l'usage des étudiants	DUNOD ISBN : 9782100496297
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE ISBN : 9780521812207
MAC LANE S. BIRKHOFF G.	Algèbre, 1 : Structures fondamentales	GAUTHIER-VILLARS
MAC LANE S. BIRKHOFF G.	Algèbre, 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. STRAUSS A.	Introduction to optimal control theory	SPRINGER ISBN : 9780387906249
MAKAROV B.M. GOLUZINA M.G. LODKIN A.A. PODKORYTOV A.N.	Problèmes d'analyse réelle	CASSINI ISBN : 9782842251246
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON ISBN : 9782225699719
MALLIAVIN M. P. WARUSFEL A.	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON ISBN : 9782225686408
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
MANIVEL	Fonctions symétriques, polynômes de Schubert	SMF ISBN : 2856290663
MANSUY R. RANDÉ B.	Les clés pour l'X (2)	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352152
Manuels Matlab	Using Matlab version 5	MATLAB
MASCART H. STOKA M.	Fonctions d'une variable réelle, Tome 2 : Exercices et corrigés	PUF
MASCART H. STOKA M.	Fonctions d'une variable réelle, Tome 3 : Exercices et corrigés	PUF ISBN : 9782130401469
MASCART H. STOKA M.	Fonctions d'une variable réelle, Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF ISBN : 9782130401469
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ ISBN : 9782804116705
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES ISBN : 9782729846725
MENEZES A. VAN OORSCHOT P. VANSTON S.	Handbook of applied cryptography	CRC PRESS ISBN : 9780849385230
MÉRINDOL J.Y.	Nombres et algèbre	EDP SCIENCES ISBN : 9782868838209
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER ISBN : 9780387947617
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction., École Polytechnique	ELLIPSES ISBN : 9782729887164
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques, Exercices d'oral corrigés et commentés, Tome 2	PUF ISBN : 9782130489801

MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	ELLIPSES ISBN : 9782729852184
MEYRE T.	Séries, intégrales et probabilités. Préparation à l'agrégation interne	E-LIVRE
MEYRE T.	Probabilités. Cours et exercices corrigés	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352374
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF ISBN : 9782130422594
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE ISBN : 9780521780988
MNEIMNÉ R.	Éléments de géométrie : action de groupes	CASSINI ISBN : 9782842250034
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352015
MNEIMNÉ R. TESTARD F.	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. VERNOTTE A.	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MOISAN J. VERNOTTE A. TOSEL N.	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES ISBN : 9782729892937
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD ISBN : 9782100029747
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT	DUNOD ISBN : 9782100033126
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI	DUNOD ISBN : 9782100030767
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 3 MP, PSI, PC, PT	DUNOD ISBN : 9782100033669
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 4 MP, PSI, PC, PT	DUNOD ISBN : 9782100034666
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD ISBN : 9782100059775
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 1	VUIBERT ISBN : 9782711721418
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. NEWMAN J. R. GÖDEL K. GIRARD J. Y.	Le théorème de Gödel	SEUIL ISBN : 9782020106528
NAUDIN P. QUITTE C.	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON ISBN : 9782225827037
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA ISBN : 9870883850112
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE ISBN : 9780521633963

O'ROURKE J.	Computational geometry in C	CAMBRIDGE ISBN : 9780521649766
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL ISBN : 9780133407389
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation)	CASSINI ISBN : 9782842250041
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation)	CASSINI ISBN : 9782842250041
OUVRARD J.Y.	Probabilités 2 (maitrise, agrégation)	CASSINI ISBN : 9782842250102
PAPADIMITRIOU C.	Computational complexity	ADDISON WESLEY ISBN : 9780201530827
PAPINI O. WOLFMANN J.	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER ISBN : 9783540602262
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	DUNOD ISBN : 9782100512171
PEDOE D.	Geometry - A comprehensive course	DOVER ISBN : 9780486658124
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER ISBN : 9780387947785
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES ISBN : 9782729855529
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école : nombres, mesure, géométrie	CASSINI ISBN : 9782842250577
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI ISBN : 9782842250218
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER ISBN : 9783540673873
PETKOVSEK M. WILF H. ZEILBERGER D.	A=B	A.K. PETERS ISBN : 9781568810638
PEVZNER P.	Computational molecular biology	MIT PRESS ISBN : 9780262161978
PÓLYA G. SZEGÖ G.	Problems and Theorems in Analysis, Volume I	SPRINGER VERLAG ISBN : 9783540636404
PÓLYA G. SZEGÖ G.	Problems and Theorems in Analysis, Volume II	SPRINGER VERLAG ISBN : 9783540636862
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES
POMMELLET A.	Agrégation de mathématiques. Cours d'analyse	ELLIPSES
PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER ISBN : 9783540407140
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire	CASSINI ISBN : 9782842250676
PREPARATA F. SHAMOS M.	Computational geometry, an introduction	SPRINGER ISBN : 9780387961316

PRESS W. FLANNERY B. TEUKOLSKI S. VETTERLING W.	Numerical recipes in Pascal	CAMBRIDGE ISBN : 9780521375160
PUTZ J. F.	Maple animation	CHAPMAN AND HALL ISBN : 9781584883784
QUEFFELEC H. ZUILY C.	Éléments d'analyse	DUNOD ISBN : 9782225848841
QUEFFELEC H. ZUILY C.	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON ISBN : 9782225848841
RALSTON A. RABINOWITCH P.	A first course in numerical analysis	INTERNATIONAL STUDENT EDITION
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Cours de Mathématiques spéciales, 1- Algèbre	MASSON
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Cours de Mathématiques spéciales, 2- Algèbre et applications à la géométrie	MASSON ISBN : 9782225634048
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Cours de Mathématiques spéciales, 3- Topologie et éléments d'analyse	MASSON ISBN : 9782225771873
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Cours de Mathématiques spéciales, 4- Séries et équations différentielles	MASSON ISBN : 9782225840679
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Cours de Mathématiques spéciales, 5- Applica- tions de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Exercices avec solutions, Algèbre	MASSON ISBN : 9782225813146
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Exercices avec solutions, Analyse 1	MASSON ISBN : 9782225800986
RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.	Exercices avec solutions, Analyse 2	MASSON ISBN : 9782225805783
RAMIS J.- P. WARUSFEL A. BUFF X. ARNIER J. HALBERSTADT E. LACHAND-ROBERT T. MOULIN F. SAULOY J.	Mathématiques Tout-en-un pour la licence, Cours complet avec 270 exercices corrigés, ni- veau L1	DUNOD ISBN : 9782100496143
RANDÉ B. TAÏEB F.	Les clés pour l'X	0 ISBN : 9782916352091
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI ISBN : 9782842250652
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY ISBN : 9780471708232

REINHARDT F. SOEDER H.	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE ISBN : 9782253130130
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER ISBN : 9780387982212
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ E. NAGY B. SZ	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER ISBN : 9783540659792
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	UIBERT ISBN : 9782711753208
ROLLAND R.	Théorie des séries, 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES ISBN : 9782868834256
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation, Analyse pour l'agrégation	UIBERT ISBN : 9782711771868
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES ISBN : 9772868834073
ROUDIER H.	Algèbre linéaire. Cours et exercices	UIBERT ISBN : 9782711724857
ROUSSEAU Y. SAINT-AUBIN Y.	Mathématiques et Technologie	SPRINGER (SUMAT) ISBN : 9780387692128
ROUVIERE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI ISBN : 9782842250089
RUAUD J.F. WARUSFEL A.	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SA EARP R. TOUBIANA E.	Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	CASSINI ISBN : 9782842250850
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352039
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	UIBERT ISBN : 9782711748075
SAKS S. ZYGMUND A.	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. MERLIER T. PILIBOSSIAN Ph. YAMMINE S.	Analyse 1	ELLIPSES ISBN : 9782729898519
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	UIBERT ISBN : 9782711789849
SCHNEIER B.	Applied cryptography	WILEY ISBN : 9780471117094

SCHWARTZ L.	Analyse, I Topologie générale et analyse fonctionnelle	HERMANN
SCHWARTZ L.	Analyse, II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN ISBN : 9782705661625
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEdgeWICK R.	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION ISBN : 9782744070242
SEdgeWICK R.	Algorithmes en langage C	DUNOD ISBN : 9780201314525
SEdgeWICK R.	Algorithms	ADDISON WESLEY ISBN : 9782744070242
SELBERHERR S. STIPPEL H. STRASSER E.	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER ISBN : 9780387818006
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	DUNOD ISBN : 9782100055159
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SHAPIRO H.	Introduction to the theory of numbers	DOVER ISBN : 9780486466699
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD ISBN : 9782100052349
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	THOMSON C.T. ISBN : 9780619217648
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD ISBN : 9782100045310
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire. Préparation à l'agrégation interne	E-LIVRE
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire et un peu de géométrie. Agrégation interne	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352350
SKANDALIS G.	Analyse-Résumés et exercices. Préparation à l'agrégation interne	E-LIVRE
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS ISBN : 9780534065465
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL ISBN : 9780412345500
STROUSTRUP B.	Le langage C++	PEARSON EDUCATION ISBN : 9782744070037
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI ISBN : 9782842250270
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352060
TAUVEL P.	Cours d'algèbre	DUNOD ISBN : 9782100045907
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD ISBN : 9782100058709

TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 2	MASSON ISBN : 9782225844416
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON ISBN : 9782225827338
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN ISBN : 9782903594121
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	S.M.F. ISBN : 9782856290329
TENENBAUM G. MENDES-FRANCE M.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF ISBN : 9782130483991
TENENBAUM G. WU J.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S.M.F. ISBN : 9782856290450
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN ISBN : 9782705614416
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT ISBN : 9782711771240
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
TURING A GIRARD J. Y.	La Machine de Turing	SEUIL ISBN : 9782020135719
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, I Théorie des fonctions	MASSON
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUTHIER J. PRAT J-J.	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON ISBN : 9782225844508
VAZIRANI V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER ISBN : 9782287006777
VINBERG E.B.	A course in algebra	AMS ISBN : 9780821834138
WAGSCHAL C.	Distributions, Analyse microlocale, Équations aux dérivées partielles	HERMANN ISBN : 9782705680817
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes, Équations différentielles	HERMANN ISBN : 9782705664565
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES ISBN : 9782729811402
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL ATTALI COLLET GAUTIER NICOLAS	Mathématiques, Analyse	VUIBERT ISBN : 9782711789573

WARUSFEL ATTALI COLLET GAUTIER NICOLAS	Mathématiques, Arithmétique	VUIBERT ISBN : 9782711789535
WARUSFEL ATTALI COLLET GAUTIER NICOLAS	Mathématiques, Géométrie	VUIBERT ISBN : 9782711789542
WARUSFEL ATTALI COLLET GAUTIER NICOLAS	Mathématiques, Probabilités	VUIBERT ISBN : 9782711789580