Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports

Session 2021	**PE2-21-G3** *Repère à reporter sur la copie*

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 13 avril 2021

Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 9 pages, numérotées de 1 à 9. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Suite à des problèmes récurrents d'alimentation en eau pour un des hameaux de sa commune, le maire projette de faire construire un château d'eau.

Partie A : choix du château d'eau

1. Afin de faire un choix esthétique parmi trois modèles proposés, le maire décide de consulter ses concitoyens. Chaque foyer peut voter une fois, tous les foyers ont voté.
Voici les résultats de la consultation :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Nombre de foyers	12	60	18

Calculer la proportion, en pourcentage, de voix recueillies parmi les foyers de ce hameau pour chacun des trois modèles proposés. Les pourcentages seront arrondis à l'unité de pourcentage.

2. Pour sélectionner le réservoir au volume le plus adapté, le maire décide d'étudier la consommation annuelle d'eau des foyers du hameau et observe qu'en 2019 elle était égale à 10 500 m^3.

a. Montrer que la consommation moyenne annuelle d'eau par foyer est d'environ 116,67 m^3.

Sachant qu'un lotissement de 17 logements va être bientôt terminé, le maire décide d'intégrer ces logements à son étude en attribuant à chacun d'entre eux la consommation annuelle d'eau moyenne par foyer du hameau.

b. Calculer la consommation annuelle estimée du hameau intégrant les nouveaux logements. On donnera le résultat en mètre cube, arrondi à l'unité.

3. Suite à son enquête et aux conseils d'un bureau d'étude, le maire souhaite choisir un réservoir pouvant contenir au minimum la consommation moyenne de 5 jours du hameau intégrant les nouveaux logements.

a. Déterminer la consommation moyenne en 5 jours de l'ensemble des foyers du hameau intégrant les nouveaux logements.

Une entreprise propose de construire un réservoir ayant la forme d'une sphère de 7 mètres de diamètre.

b. Déterminer le volume de ce réservoir. On donnera l'arrondi du volume au mètre cube.
On rappelle que le volume V d'une boule de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.

c. Ce réservoir répond-il aux souhaits du maire ?

4. On considère que le réservoir choisi contient 180 m^3 d'eau. Le débit de la pompe qui permet de le remplir est de 40 m^3/h.
Déterminer le temps nécessaire pour remplir ce réservoir aux trois quarts. Donner la réponse en heure, minute et seconde.

Partie B : nuisances et impact paysager

1. Pour éviter toute polémique quant au lieu d'implantation du projet, le maire décide d'installer le château à égale distance des trois habitations les plus proches. Pour expliciter ce choix aux habitants, il souhaite représenter la situation par un tracé géométrique. Il désigne par les points H_1, H_2 et H_3 les trois habitations.

On sait que les distances entre les habitations sont $H_1H_2 = 1$ km, $H_2H_3 = 820$ m et $H_1H_3 = 730$ m.

a. Représenter la situation à l'échelle $1/10\ 000$.

b. Placer le point C, tel qu'il soit à égale distance des trois points représentant les habitations. On veillera à laisser les traits de construction et on justifiera le tracé sur la copie.

c. En utilisant la figure construite, estimer la distance entre le château d'eau et chacune des 3 habitations.

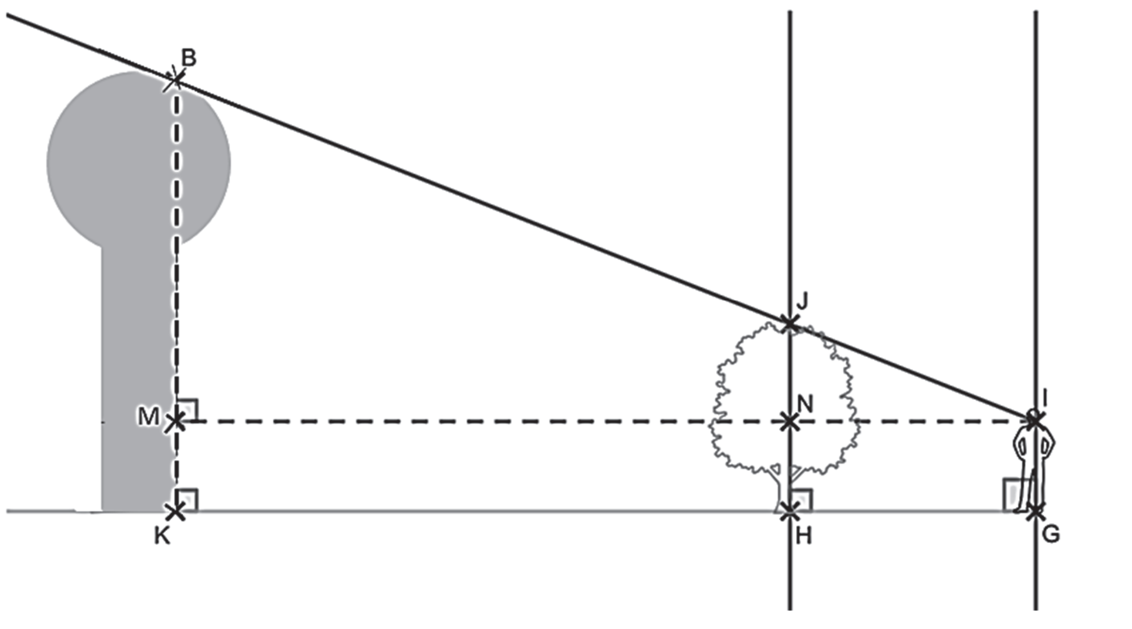
2. Afin de masquer la vue du château d'eau, un des habitants décide de planter une haie. Afin de choisir l'essence d'arbres à planter, il souhaite connaître la hauteur que devront atteindre ces arbres pour masquer la vue du château d'eau depuis sa terrasse.

La figure ci-après, qui n'est pas à l'échelle, représente la situation. Cet habitant est au point G sur sa terrasse, le château d'eau est implanté au point K et on a noté H le point où il souhaite planter une haie pour masquer le château d'eau.

On connait les dimensions suivantes : KG = 510 m, GI = 1,80 m et HG = 20 m. La hauteur KB est de 45 mètres.

Le point I correspond à l'œil de l'homme et le point J correspond à la hauteur que doivent atteindre les arbres pour masquer la vue du château d'eau.

Les points M et N sont situés à 1,80 m du sol. On a ainsi, MI = KG = 510 m et NI = HG = 20 m.



Calculer la hauteur minimale HJ des arbres pour que cet habitant ne voie plus le château d'eau lorsqu'il se tient debout sur sa terrasse. On arrondira le résultat au centimètre.

Partie C : entretien du château d'eau

1. Le réservoir d'eau choisi a une contenance de 180 m^3. L'ingénieur informe le maire que l'eau du château d'eau, bien que puisée dans une source, doit être chlorée. Il faut prévoir 0,1 mg de chlore par litre d'eau.
Déterminer la quantité de chlore, en gramme, à prévoir au minimum pour 180 m^3 d'eau.

2. Pour assurer l'entretien annuel de ce château d'eau, la commune sollicite deux entreprises.

- La société *Qualiteau* propose un forfait annuel de 700 € pour les déplacements puis toute intervention est facturée 350 €.
- La société *Calmwater* propose également un forfait annuel pour les déplacements au tarif de 500 € puis toute intervention est facturée 450 €.

On note x le nombre d'interventions annuelles.

a. Montrer que le montant annuel $Q(x)$ à payer à la société *Qualiteau*, en fonction de x, est donné par l'expression $Q(x) = 350x + 700$.

b. Exprimer, en fonction de x, le montant annuel $C(x)$ à payer à la société *Calmwater.*

c. Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement les fonctions Q et C. On prendra en abscisse 2 cm pour une intervention et en ordonnée 1 cm pour 200 €.

d. À partir du graphique construit à la question **2.c.**, lire le nombre d'interventions annuelles pour lequel le montant de la facture sera le même pour les deux sociétés. Vérifier le résultat trouvé par un calcul.

e. Quelle société devient alors la plus avantageuse pour la commune pour un nombre supérieur d'interventions ?

3. Une troisième entreprise, la société *Bellacqua,* vient de s'implanter dans la région. Elle ne facture aucun déplacement mais propose un tarif par intervention de 550 €.

a. Exprimer, en fonction de x, le montant annuel $\mathrm{B}(x)$ à payer à la société *Bellacqua*.

b. Dans le repère orthogonal construit à la question **2.c.**, représenter graphiquement le tarif de la société *Bellacqua* en fonction du nombre x d'interventions.

c. La commune souhaiterait faire travailler la société *Bellacqua*. Lire sur le graphique le nombre maximum d'interventions pour lequel le prix à payer sera plus intéressant que celui des deux autres sociétés. Justifier la démarche.

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Voici un programme de calcul :

- **Choisir un nombre entier positif.**
- **Calculer le carré C_1 du nombre entier qui le suit.**
- **Calculer le carré C_2 du nombre entier qui le précède.**
- **Calculer la différence C_1- C_2.**

1. Vérifier qu'en prenant 5 comme nombre de départ, on obtient 20.

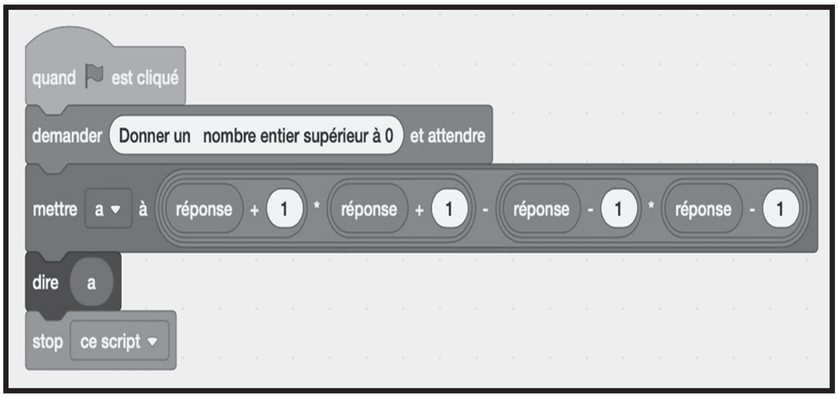
2. On appelle x le nombre de départ, montrer que le résultat obtenu est égal à $4x$.

3. Est-il possible d'obtenir 842 ? Si oui, donner le nombre de départ. Sinon, expliquer pourquoi.

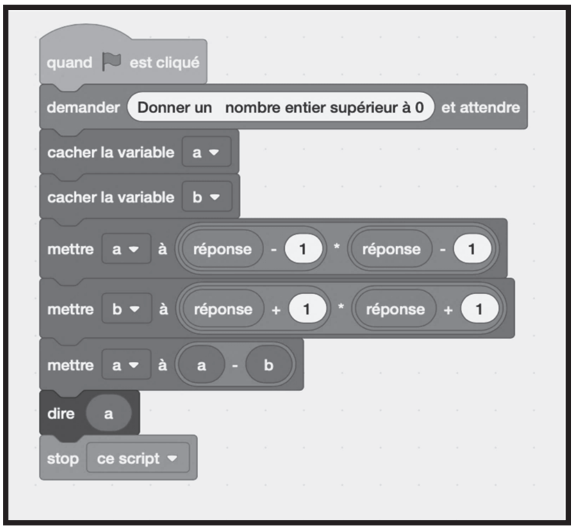
4. Déterminer le nombre de départ pour que le programme ait comme résultat 2^{98}. On justifiera la réponse.

5. Parmi les trois captures d'écran issues du logiciel SCRATCH, donner, sans justifier, le(s) script(s) qui correspond(ent) au programme de calcul proposé.

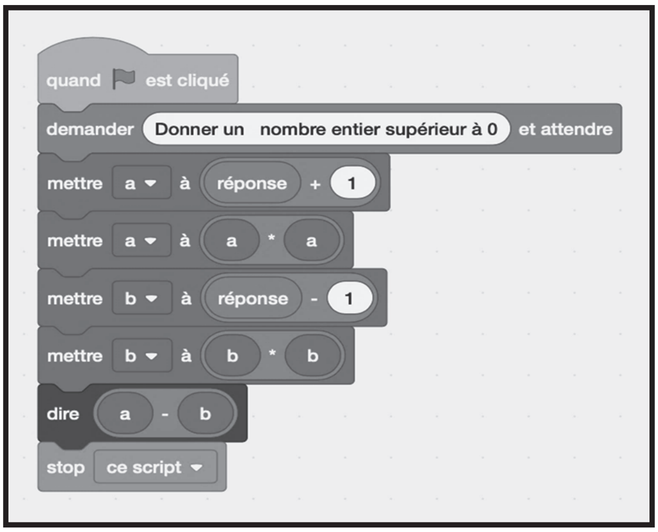
Script 1



Script 2



Script 3



EXERCICE 2

On considère une classe composée de 30 élèves. Certains sont enfants uniques, c'est-à-dire n'ayant ni frère ni sœur, d'autres ne le sont pas.
Dans cette classe,

- 40 % des élèves sont des garçons ;
- un tiers des garçons sont des enfants uniques ;
- 25 % des enfants uniques sont des garçons.

1. **a.** Déterminer le nombre total de garçons dans cette classe.

b. Déterminer le nombre de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

c. Reproduire, sur la copie, le tableau des effectifs de la classe ci-dessous puis le compléter.

	Fille	**Garçon**	**Total**
Enfant unique			
Enfant non unique			
Total			30

2. On choisit au hasard un élève de cette classe.

a. Calculer la probabilité que cet élève soit un enfant unique. On arrondira le résultat au centième.

b. Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon n'ayant ni frère ni sœur. On arrondira le résultat au centième.

c. On sait que l'élève choisi est une fille. Calculer la probabilité qu'elle soit une fille unique. On arrondira le résultat au centième.

EXERCICE 3

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. *Définition : Un nombre parfait est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs. Par exemple, 6 est parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a :* $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ *qui correspond au double de 6.*

Affirmation 1 : « 28 est un nombre parfait. »

2. **Affirmation 2** : « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54. »

3. On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %.

Affirmation 3 : « L'aire du rectangle est inchangée. »

4. Un rectangle a une longueur de 5 cm et une largeur de 4 cm. On augmente la longueur de 10 % et on diminue la largeur de 10 %.

Affirmation 4 : « Le périmètre du rectangle diminue. »

TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

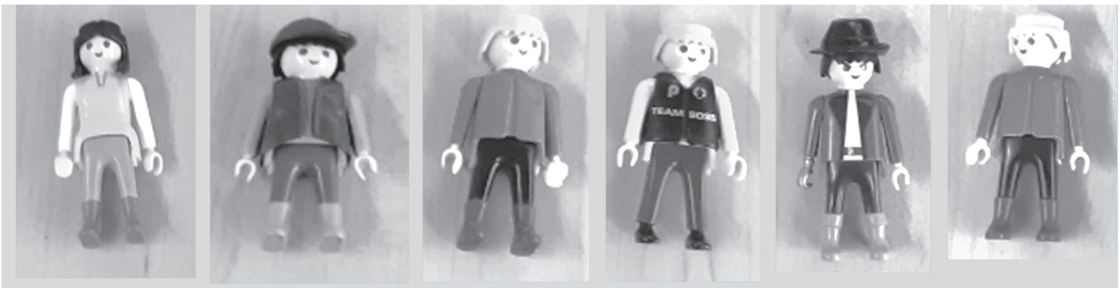
Un enseignant en classe de grande section présente 6 personnages installés en cercle et demande à 3 élèves d'aller chercher en « un voyage » autant de jetons (« pas plus, pas moins ») que de personnages, sachant que les jetons sont positionnés à une dizaine de mètres des personnages.

L'enseignant a noté le nombre de jetons apportés lors du premier voyage :

Prénoms des élèves	**Nombre de jetons apportés**
Mathéo	15
Salomé	7
Fatoulala	6

1. a. Émettre deux hypothèses sur ce qui a pu conduire Salomé à se tromper.

b. Afin d'aider Salomé, le maître propose la situation suivante :



Expliquer en quoi cette situation pourrait aider cette élève à réussir la tâche proposée.

2. a. Émettre une hypothèse sur ce qui a pu conduire Mathéo à se tromper.

b. Proposer une situation qui pourrait aider à vérifier l'hypothèse émise à la question précédente.

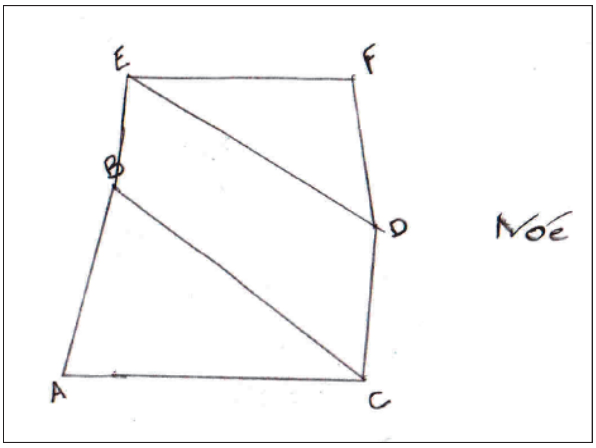
3. Proposer une nouvelle tâche que l'enseignant pourrait proposer à Fatoulala, pour lui permettre d'aller plus loin dans ses apprentissages. Justifier cette proposition.

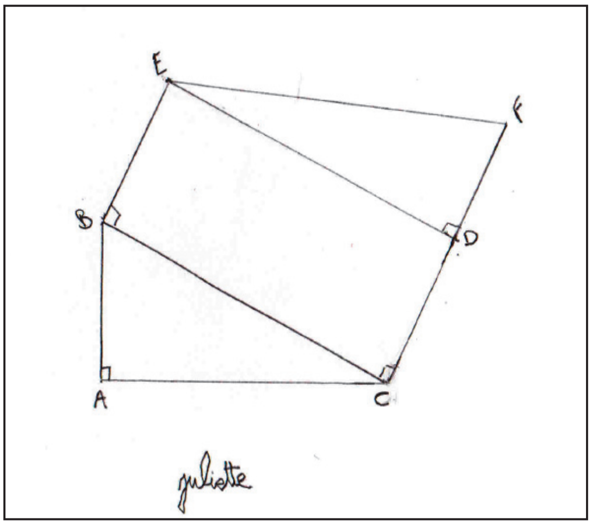
SITUATION 2

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 l'exercice suivant, issu du manuel « Le nouvel À portée de maths » (Hachette, 2018).

> **Tracer une figure à partir d'un programme de construction**
>
> **3** • **Trace la figure qui correspond à ce programme de construction.**
>
> **a.** Trace un triangle ABC rectangle en A.
>
> **b.** Trace le rectangle CDEB.
>
> **c.** Trace le triangle DEF rectangle en D.

Voici 2 productions d'élèves :





1. Analyser les deux productions en terme d'erreurs et de réussites.

2. L'utilisation de papier quadrillé ou pointé pourrait-elle aider Noé ? Justifier la réponse.

3. Donner deux aides, non liées au papier utilisé, qui pourraient être proposées pour Noé.

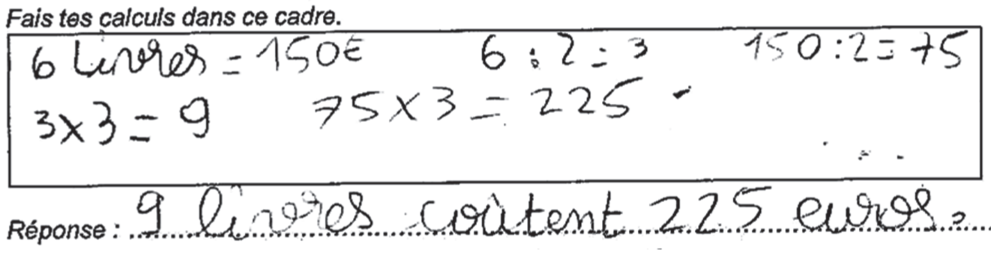
SITUATION 3

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de CM2 par une enseignante.

> On commande pour la classe des cahiers et des livres.
> 6 livres coûtent 150 euros.
> Combien coûtent 9 livres ?

Voici les réponses de deux élèves : Tama et Hina

- **Production de Tama**

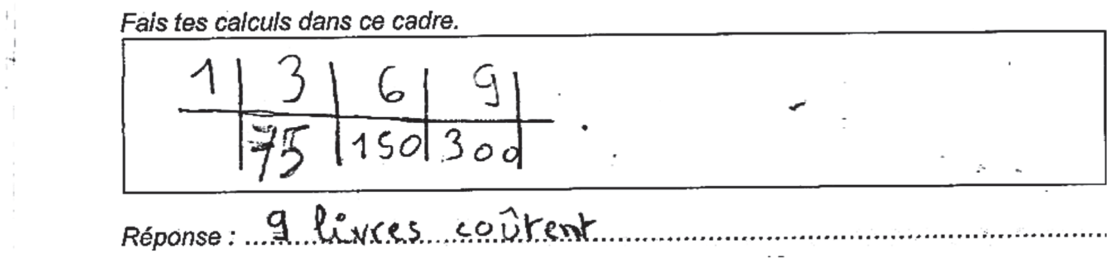


Fais tes calculs dans ce cadre.

6 livres = 150€ 6 : 2 = 3 150 : 2 = 75
3x3 = 9 75x3 = 225

Réponse : 9 livres coûtent 225 euros.

- **Production de Hina**



Fais tes calculs dans ce cadre.

1	3	6	9
	75	150	300

Réponse : 9 livres coûtent

1. Quelle est la principale notion mathématique travaillée dans ce problème ?

2. Analyser chacune des deux productions ci-dessus en repérant les réussites et les erreurs éventuelles et en explicitant les propriétés mathématiques mobilisées.

3. Proposer trois procédures permettant à Tama de compléter correctement la case sous le 9 en partant du tableau qu'elle a commencé à compléter et qui est reproduit ci-dessous.

1	3	6	9
	75	150	

4. L'enseignant(e) modifie l'énoncé en demandant de calculer le prix de 8 livres.
   a. Proposer deux procédures qu'un élève de CM2 pourrait mobiliser pour trouver le prix à payer pour l'achat de ces 8 livres.
   b. L'enseignant souhaite que les élèves utilisent le passage à l'unité. Proposer une modification à l'énoncé initial qui encourage l'utilisation de cette procédure.