ministère Éducation nationale

EBI MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2011

CAPES
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Séquences de séries consécutives de PILE ou de FACE avec une pièce de monnaie

On lance plusieurs fois, de manière indépendante, une pièce de monnaie et on s'intéresse à la série de PILE et de FACE obtenue. Plus particulièrement, on s'intéresse aux séries consécutives de PILE ou de FACE obtenues.

N.B. :
- Les parties **I** et **II** sont indépendantes.
- Il n'est pas nécessaire que le candidat explicite un espace probabilisé correspondant à l'expérience aléatoire étudiée.
- Pour tout événement E, la probabilité de E sera notée $\mathbb{P}(E)$.
- On admet l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si X est une variable aléatoire réelle d'espérance mathématique m et de variance σ^2, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(|X-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Remarque : Dans tout le problème, lorsqu'il est demandé d'**expliquer**, l'argumentation peut s'appuyer sur un schéma ou un arbre.

Partie préliminaire : Suites de Fibonacci

Dans le problème, on rencontrera à plusieurs reprises, des suites dites de Fibonacci : ce sont des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels, définies par leurs deux premiers termes $u_1 = a$ et $u_2 = b$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On admettra qu' une suite de Fibonacci est entièrement déterminée par la donnée de a et b.

1. Démontrer que la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ est une suite de Fibonacci si, et seulement si, r est solution de l'équation $r^2 - r - 1 = 0$. Déterminer les deux solutions de cette équation qui seront notées ϕ et ψ (où ϕ désigne la solution positive).

2. Soit a et b deux nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de Fibonacci telle que $u_1 = a$ et $u_2 = b$.

2.1 On considère le système d' inconnues (x, y) :

$$\begin{cases} \phi x + \psi y &= a \\ \phi^2 x + \psi^2 y &= b \end{cases}$$

Vérifier que ce système admet une solution unique. On notera (λ, μ) cette solution.

Note : On ne demande pas de calculer λ et μ.

2.2 Vérifier par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$.

3. Dans cette section **3.**, **on s'intéresse au cas particulier défini par $a = 0$ et $b = 1$.**

3.1 Calculer λ et μ (définis à la question **2.1**) dans ce cas particulier.

3.2 En déduire l'expression suivante de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Partie I : Séquences de trois côtés consécutifs égaux

On cherche à estimer dans lequel des intervalles $[0; 0,2[$, $[0,2; 0,4[$, $[0,4; 0,6[$, $[0,6; 0,8[$, $[0,8; 1]$ *se situe la probabilité qu'en dix lancers d'une pièce de monnaie bien équilibrée apparaissent au moins trois côtés consécutifs égaux, c'est-à-dire au moins trois PILE ou au moins trois FACE.*

On dispose d'une pièce de monnaie bien équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle la probabilité d'apparition du côté PILE et la probabilité d'apparition du côté FACE sont égales à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on modélise n lancers successifs de la pièce de monnaie équilibrée par la n-liste $(x_1, x_2, \dots x_n)$, où, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n, x_k vaut 1 si PILE apparaît au k-ième lancer, 0 sinon.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « apparition d'au moins trois côtés consécutifs égaux (c'est-à-dire au moins trois PILE ou au moins trois FACE) en n lancers » et p_n sa probabilité.

1. Simulation sur tableur (cas $n = 10$)

1.1 Dans la simulation de dix lancers sur un tableur dont une copie d'écran est proposée ci-dessous :

- chacune des cellules de la ligne **L1** de la plage **C1:C10** contient de façon équiprobable l'un des deux nombres 0 ou 1 – ici obtenu en utilisant la formule ENT(2*ALEA()).
- chacune des cellules **L2C3**, **L2C4**, ..., **L2C10** contient respectivement la somme du contenu des cellules **L1C1**, **L1C2**, **L1C3**, la somme du contenu des cellules **L1C2**, **L1C3**, **L1C4**, ..., la somme du contenu des cellules **L1C8**, **L1C9**, **L1C10**.

◇	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
2			2	1	1	0	0	1	2	3
3										1

On veut que la cellule **L3C10** contienne 1 si E_{10} est réalisé, 0 sinon.

Comment procéder pour obtenir ce résultat à partir du contenu des cellules de la ligne **L**2 de la plage **C**3:**C**10 .

1.2 On répète N fois l'expérience aléatoire qui consiste à lancer dix fois la pièce de monnaie ($N \in \mathbb{N}^*$) et, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et N, on désigne par X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si, à la k-ième expérience, E_{10} est réalisé, 0 sinon.

Alors $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité ; on note m leur espérance commune et on pose : $F_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$.

1.2.1 Décrire la loi suivie par chacune des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_N$.

1.2.2 Préciser l'espérance de F_N en fonction de m et N.

1.2.3 Calculer la variance de F_N en fonction de m et N.

1.2.4 On se propose de déterminer $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(|F_N - m| < 0,1) \geqslant 0,9$.

1.2.4.1 En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

pour tout réel ε strictement positif, $\mathbb{P}(|F_N - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{m(1-m)}{N\varepsilon^2}$.

1.2.4.2 Justifier l'inégalité $m(1-m) \leqslant \dfrac{1}{4}$, valable pout tout $m \in [0;1]$.

1.2.4.3 Montrer que $N \geqslant 250$ répond au problème posé en **1.2.4.**

1.3 Dans la simulation de 250 répétitions de dix lancers de la pièce de monnaie sur un tableur dont une copie d'écran partielle est proposée ci-dessous :

- les cases **L**3, **L**5, ..., **L**499 et **L**501 de la colonne **C**12 contiennent 1 si respectivement à l'expérience numéro 1, 2, ..., 249, 250, l'événement E_{10} est réalisé et 0 sinon ;
- la cellule **L**502**C**12 contient la moyenne du contenu des cellules **L**3, **L**5,..., **L**499 et **L**501 de la colonne **C**12.

◇	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	expérience n°1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	
3				1	2	3	3	2	2	2	2	1
4	expérience n°2	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	
5				3	3	3	3	2	1	1	1	1
6	expérience n°3	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	
7				3	2	1	1	1	2	2	2	1
8												
408												
498	expérience n°249	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	
499				1	1	2	2	2	1	2	2	0
500	expérience n°250	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	
501				1	2	1	2	2	2	1	0	1
502												0,844

À chaque appui sur une certaine touche, une nouvelle simulation de 250 répétitions de dix lancers est exécutée. En appuyant trois fois sur cette touche, on a obtenu dans la cellule **L**502 de la colonne **C**12 les valeurs : 0,844 0,765 et 0,81.

Que représentent ces valeurs en liaison avec la section **1.2** ?

2. Détermination de $p_n = \mathbb{P}(E_n)$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'événement $\overline{E_n}$ (l'événement contraire de E_n) et on note u_n le nombre de n-listes d'éléments de l'ensemble $\{F, P\}$ **ne comportant pas** trois éléments consécutifs égaux.

2.1 Justifier les égalités : $u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6$. Calculer u_4.

2.2 On se propose de démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Fibonacci.

2.2.1 Justifier que pour $n \geqslant 1$, le nombre de $n+2$-listes de $\overline{E_{n+2}}$ commençant par PF ou par FP est égal à u_{n+1}.

2.2.2 Justifier que pour $n \geqslant 1$, le nombre de $n+2$-listes de $\overline{E_{n+2}}$ commençant par PP ou par FF est égal à u_n.

2.2.3 Conclure.

2.3 Démontrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \mathbb{P}(E_n) = 1 - \frac{u_n}{2^n}.$$

2.4 Reproduire l'algorithme ci-dessous et en compléter les zones grisées de façon à ce qu'à la fin de cet algorithme, l'affichage de la variable **u** donne la valeur de u_n $(n \geqslant 2)$.

Aucune justification n'est attendue.

```
Entrer n
v ←— 2
u ←— 4
Pour k variant de       à       faire :
    w ←— u
    u ←—
    v ←—
Fin de boucle Pour
Afficher u
```

2.5 Déterminer u_{10} à l'aide de la calculatrice. En déduire la valeur exacte et une valeur décimale approchée à $0,01$ près de p_{10}.

2.6 Expression explicite de p_n

2.6.1 Démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

2.6.2 Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2.7 Le but de cette question est de déterminer le plus petit entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, la probabilité d'apparition d'au moins trois côtés consécutifs égaux en n lancers soit supérieure ou égale à $0,95$.

2.7.1 Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et prouver que l'on a, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} \leqslant 2u_n$.

2.7.2 En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} - p_n \geqslant 0$.

2.7.3 En explicitant la méthode choisie, utiliser la calculatrice pour donner la valeur de l'entier n_0.

Partie II : Séquences de deux côtés PILE consécutifs

Dans cette deuxième partie, on effectue des lancers successifs (et indépendants) d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'apparition de PILE (P) est p et celle de FACE (F) est q, où les réels p et q vérifient les relations $0 < p < 1$ et $p + q = 1$.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement : « apparition d'un double PILE au rang n », dont la définition est précisée ci-dessous :

> On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang $n \geqslant 2$, s'il y a un PILE au rang n et au rang $n-1$ mais qu'il n'y a pas un double PILE au rang $n-1$.

Plus précisément, on dispose d'une liste de P (pour PILE) et de F (pour FACE). On va la transformer ***en allant de gauche à droite*** en une liste de **F** (FACE), **SP** (simple PILE) et **DP** (double PILE) selon le procédé suivant :

- un F reste **F**
- un P devient **DP** s'il est précédé d'un **SP** et devient **SP** dans les autres cas.

L'exemple suivant donne les résultats de seize premiers lancers :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F	P	P	F	P	P	P	F	P	F	P	P	P	P	P	F
F	**SP**	**DP**	**F**	**SP**	**DP**	**SP**	**F**	**SP**	**F**	**SP**	**DP**	**SP**	**DP**	**SP**	**F**

Il y a un double PILE aux rangs 3, 6, 12 et 14. Les rangs 7, 13 et 15, en revanche restent des simple PILE car le rang précédent est déjà double PILE. Un PILE ne peut donc pas participer à la réalisation de plus d'un double PILE, dans le sens où, pour tout entier naturel n non nul, si l'événement « apparition d'un double PILE au rang n » est réalisé, l'événement « apparition d'un double PILE au rang $n+1$ » ne l'est pas.

On notera, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'événement : « apparition d'un double PILE au rang n » et a_n sa probabilité ;
- P_n l'événement : « apparition de PILE au rang n » et F_n l'événement : « apparition de FACE au rang n. »

1. Étude d'un exemple

On considère les 16 lancers suivants :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P	F	P	P	P	P	P	P	F	F	F	P	P	P	F	F

Recopier le tableau en complétant la dernière ligne par les indications **F, SP** ou **DP**.

2. Étude des événements A_n

2.1 Calcul de a_n

2.1.1 On peut remarquer que $a_1 = 0$. Calculer chacune des probabilités a_2, a_3, a_4 en fonction de p et q.

2.1.2 Expliquer pourquoi, pour $n, k \in \mathbb{N}^*$, les événements A_n et P_{n+k} sont indépendants.

2.1.3 Expliquer pourquoi les événements $F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$ et $A_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$ constituent une partition de A_{n+2}. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

2.1.4 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad v_n = a_n - c$, où c est le réel tel que : $\quad c = p^2 c + qp^2$.

2.1.4.1 Justifier l'existence du réel c.

2.1.4.2 Démontrer qu'il existe un réel β, qu'on déterminera, tel que, pour tout entier naturel n non nul, $\quad v_{n+2} = \beta v_n$.

2.1.4.3 En distinguant les cas n pair et n impair, donner l'expression de v_n en fonction de n et de p.

2.1.5 Établir alors l'expression : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{p}{1+p}\left(p + (-p)^n\right).$

2.2 Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'événement A_n est réalisé et 0 sinon.

2.2.1 Préciser la loi de probabilité de Y_n et son espérance.

2.2.2 Interpréter, pour n entier naturel non nul, la variable aléatoire $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
On désigne par m_n le nombre moyen de réalisations d'un double PILE sur les n premiers lancers de la pièce de monnaie.
Déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$, la limite de $\dfrac{1}{n} m_n$.

3. Étude de l'apparition du premier double PILE

Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement : « la première apparition d'un double pile se situe au rang n » et b_n sa probabilité.

3.1 Relation de récurrence

3.1.1 On a bien sûr $b_1 = 0$. Calculer chacune des probabilités b_2, b_3, b_4.

3.1.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{F_1}(B_{n+2})$ et $\mathbb{P}_{P_1}(B_{n+2})$ en fonction de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}(B_n)$.

3.1.3 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad b_{n+2} = qb_{n+1} + pqb_n$.

3.2 Étude du cas particulier où la pièce est bien équilibrée

On suppose donc dans toute la section **3.2** que la pièce est bien équilibrée.

3.2.1 Donner les valeurs des probabilités b_1, b_2, b_3 et b_4, ainsi que l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et de b_n.

3.2.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 2^n b_n$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Fibonacci (voir la partie préliminaire).

3.2.3 Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de b_n en fonction de n.

3.3 Étude d'un deuxième cas particulier

On suppose dans cette section **3.3** que $p = \dfrac{2}{3}$.

3.3.1 Donner les valeurs des probabilités b_1, b_2, b_3, b_4 .

3.3.2 Calcul de b_n

Pour tout entier naturel n non nul, on note U_n la matrice colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

3.3.2.1 Déterminer une matrice A telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_{n+1} = AU_n$$

3.3.2.2 Exprimer, pour tout entier naturel non nul, la matrice colonne U_n en fonction de n, A et U_1.

3.3.2.3 On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice Q qui vérifie $PQ = QP = I$ où I est la matrice unité définie par $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3.2.4 On pose $D = QAP$. Calculer D, puis expliciter la matrice D^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3.3.2.5 Démontrer que , pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nQ$.

3.3.2.6 En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

3.3.3 Pour tout entier naturel n non nul, on appelle C_n l'événement : « aucune apparition d'un double PILE au cours des n premiers lancers » et c_n sa probabilité.

3.3.3.1 Exprimer $\overline{C_n}$ à l'aide des événements $B_1, \ldots, B_n$ puis déterminer c_n.

3.3.3.2 Quelle est la limite de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? Interpréter ce résultat.

3.4 Temps d'attente du premier double PILE

On revient au cas général et on s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T qui donne le rang de la première apparition d'un double pile.

3.4.1 Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire T et, pour chacune d'elles, la probabilité que T prenne cette valeur.

3.4.2 Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction polynomiale f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n$.

3.4.2.1 En considérant la dérivée de f_n, démontrer que l'on a, pour tout réel $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 + (x-1)nx^n - x^n}{(1-x)^2}.$$

3.4.2.2 Pour tout réel x strictement compris entre -1 et 1, calculer la limite de la suite $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.4.2.3 Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x strictement compris entre -1 et 1, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ tend vers $\frac{1}{(1-x)^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

3.4.3 On admet que la variable aléatoire T admet une espérance et que cette espérance $\mathrm{E}(T)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(T = k)$.

3.4.3.1 Dans le cas $p = \frac{2}{3}$, calculer l'espérance $\mathrm{E}(T)$ de T.

Quel est le rang moyen d'apparition du premier double PILE ?

3.4.3.2 Reprendre la question précédente dans le cas où la pièce est bien équilibrée.

3.4.4 Commenter en les comparant les résultats des deux questions précédentes ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 11 0411 – D'après documents fournis