MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

EAI MAT 1

SESSION 2018

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

▶ **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	101	0540

▶ **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	101	0540

Notations, rappels et présentation du problème

- ▷ On note $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles de nombres usuels : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels et nombres complexes.
- ▷ Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul fixé et $\mathbb{K}$ désigne un corps égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- ▷ Si A est une partie de B (*i.e.* $A \subset B$), on note $B - A$ le complémentaire de A dans B.
- ▷ Si p et q sont deux entiers relatifs, on pose $[\![p, q]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant k \leqslant q\}$.
- ▷ $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$; pour tout entier naturel d, on note $\mathbb{K}_d[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à d.
- ▷ Si P et Q sont deux polynômes, on note $P \wedge Q$ le p.g.c.d. de P et Q ; par définition, lorsqu'il n'est pas nul, ce polynôme est unitaire.
- ▷ On identifie $\mathbb{K}^n$ avec le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes de taille n.
- ▷ $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices carrées de taille n et l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$; $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre, *i.e.* $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau ; $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ un groupe.
- ▷ $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}-$algèbre par restriction de la loi externe aux nombres réels.
- ▷ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- ▷ Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, on note $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$ la matrice de u relativement à la base $\mathscr{B}$.
- ▷ Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est noté $\det(A)$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- ▷ Pour tout $v = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\overline{v} = (\overline{x_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
- ▷ Pour toute matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice $[\overline{a_{i,j}}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
- ▷ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A (I_n désigne la matrice unité de taille n). Ce polynôme est unitaire de degré n.
- ▷ Si E désigne un ensemble quelconque, on dit qu'une application $f : E \longrightarrow E$ est involutive lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

L'objectif du problème est d'établir l'assertion (1) suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2, \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Pour cela, on commencera par montrer que cette assertion est équivalente à l'assertion (2) :

$$\forall C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Une démonstration directe sera proposée en dernière partie.

Partie I : résultats préliminaires

On fixe deux matrices A et B, éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer l'assertion (1) dans le cas où $n = 1$.

2. Étude de la conjugaison dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\overline{Av} = \overline{A}\,\overline{v}$.

b) Montrer que l'application : $\begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ \quad A \quad \longmapsto \quad \overline{A} \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}-$algèbre involutif.

c) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.

d) En déduire que, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(A\overline{A}\right) \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < \eta \implies A - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

b) En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

4. On suppose dans cette question que A est inversible.

a) Calculer $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.

b) En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *à déterminer* telle que :

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det\left(I_n + C\overline{C}\right).$$

5. Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.

Partie II : démonstration de (2) dans un cas particulier

On considère : $\Omega = \{C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples$\}$.
Soit $C \in \Omega$.

6. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$.

- **a)** Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
  Indication : on pourra montrer que AB et BA sont semblables.
- **b)** Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
  Indication : on pourra utiliser la question 3.b.
- **c)** Montrer que $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

7. Montrer que $C\overline{C}$ est diagonalisable. Que dire de la dimension des sous-espaces propres ?

8. Soient λ une valeur propre *réelle* de $C\overline{C}$ et $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

- **a)** Montrer que $\overline{C}C\overline{v} = \lambda\overline{v}$.
- **b)** En calculant $C\overline{C}C\overline{v}$, montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $C\overline{v} = \mu v$.
- **c)** Calculer $C(\overline{\mu}\,\overline{v})$ de deux manières différentes. En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

9. Montrer que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$.

Partie III : résultant de deux polynômes

Soit $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$ un couple d'entiers naturels non nuls.
Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k X^k \in \mathbb{K}_q[X]$ un polynôme de degré q et $Q = \displaystyle\sum_{l=0}^{r} b_l X^l \in \mathbb{K}_r[X]$ un polynôme de degré r.

On pose :

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_0 \quad a_0 \quad \cdots \quad a_0}}^{r} \quad \overbrace{\hphantom{b_0 \quad b_0 \quad \cdots \quad b_0}}^{q} \\ \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_q & \vdots & & a_1 & b_r & \vdots & & b_1 \\ 0 & a_q & \ddots & \vdots & 0 & b_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_q & 0 & \cdots & 0 & b_r \end{vmatrix} \end{array} \in \mathbb{K}.$$

Tournez la page S.V.P.

$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)$ est appelé résultant de P et Q. C'est le déterminant d'une matrice carrée de taille $q+r$, appelée matrice de Sylvester et notée $\mathrm{Syl}(P,Q)$.

On pose $\mathscr{B} = \big((1,0),(X,0),\dots,(X^{r-1},0),(0,1),(0,X),\dots,(0,X^{q-1})\big)$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{can}} = \big(X^k\big)_{0\leqslant k\leqslant q+r-1}$.

On considère enfin l'application $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{r-1}[X]\times\mathbb{K}_{q-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ (U,V)\longmapsto PU+QV \end{cases}$.

10. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]\times\mathbb{K}_{q-1}[X]$.

11. Montrer que φ est une application linéaire.

12. Expliciter sa matrice M relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$.

13. On suppose que $P\wedge Q = 1$.

a) Montrer que φ est injective.

b) En déduire que $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)\neq 0$.

14. On suppose que $P\wedge Q\neq 1$.
Montrer que φ n'est pas injective, puis que $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)=0$.

Ainsi, on a démontré que : $P\wedge Q=1$ si et seulement si $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)\neq 0$.

On pose : $\Delta(P) = \dfrac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{a_q}\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}\left(P,P'\right)$, où P' désigne le polynôme dérivé de P. $\Delta(P)$ est appelé discriminant de P.

15. On suppose ici que P est de degré 2 et on pose $P = aX^2+bX+c$. Calculer $\Delta(P)$.

16. On suppose ici que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et par conséquent que $P\in\mathbb{C}[X]$. Montrer que P est scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P)\neq 0$.

Partie IV : quelques résultats sur les fonctions polynômiales à plusieurs variables

Soit d un entier naturel non nul.

On dit qu'une fonction $P:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$ est polynômiale lorsqu'il existe une partie finie S de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k\in S}$ de nombres complexes telles que :

$$\forall(x_1,x_2,\dots,x_d)\in\mathbb{C}^d,\quad P(x_1,x_2,\dots,x_d) = \sum_{(k_1,\dots,k_d)\in S} a_{(k_1,\dots,k_d)}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}.$$

Soit P une fonction polynômiale.

En reprenant les notations précédentes, on pose : $Z_P = \left\{(x_k)_{1\leqslant k\leqslant d}\in\mathbb{C}^d \;\middle|\; P(x_1,x_2,\dots,x_d)=0\right\}$.

17. **a)** Soient I_1, I_2, ..., I_d des parties infinies de $\mathbb{C}$. On suppose que $I_1\times I_2\times\cdots\times I_d\subset Z_P$. Montrer que P est la fonction polynômiale nulle, *i.e.* que tous ses coefficients sont nuls.
Indication : on pourra procéder par récurrence sur d.

b) En déduire que si $P\neq 0$, alors Z_P est un fermé d'intérieur vide, puis que $\mathbb{C}^d\backslash Z_P$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}^d$.

On rappelle que : $\Omega = \{C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.

18. À l'aide du discriminant, montrer que Ω est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

19. Démontrer l'assertion (2).
Indication : on pourra utiliser les résultats de la partie II.

20. **a)** Montrer plus généralement que, pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geqslant 0.$$

b) En déduire que si M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.

c) En déduire que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'image d'une matrice réelle par l'application exponentielle alors les valeurs propres réelles négatives de M sont de multiplicité paire.

Partie V : autre manière d'introduire le résultant

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D \neq 0$.

Pour tout polynôme U, on note $\mathrm{quo}_D(U)$ (*resp.* $\mathrm{rem}_D(U)$) le quotient (*resp.* le reste) de la division euclidienne de U par D.

21. Montrer que quo_D et rem_D sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ et que rem_D est un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

On reprend les notations de la partie III. On note (Q) l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par Q et on pose $E = \mathbb{K}[X]/(Q)$.

Pour tout $U \in \mathbb{K}[X]$, on note $\overline{U}$ la classe de U modulo Q.

22. Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r et que $\mathscr{B}_0 = \left(\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X}^{r-1}\right)$ en est une base.

23. On considère l'endomorphisme : $f\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ \overline{U} \longmapsto \overline{PU} \end{cases}$.

D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$, il existe un unique couple (U_j, R_j) appartenant à $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $X^j P = QU_j + R_j$ et $\deg(R_j) \leqslant r - 1$.

On note $\tilde{R}$ la matrice de la famille $(R_0, R_1, \dots, R_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.

a) Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel E si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

b) Exprimer la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_0}(f)$ de f relativement à la base $\mathscr{B}_0$ à l'aide de $\tilde{R}$.

24. On considère l'endomorphisme $\tilde{f}\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ S \longmapsto P \times \mathrm{rem}_Q(S) + Q \times \mathrm{quo}_Q(S) \end{cases}$.

a) Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f}$ est bien défini.

b) Pour tout $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\tilde{f}(U + QV)$.

c) Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (1, X, X^2, \dots, X^{r-1}, Q, XQ, \dots, X^{q-1}Q)$ est une base de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

d) À l'aide de la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}\left(\tilde{f}\right)$, montrer que $\det(\tilde{f}) = \det(f)$.

Tournez la page S.V.P.

25. On considère maintenant les endomorphismes :

$$\xi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ \quad S \quad \longmapsto P \times \operatorname{rem}_{X^r}(S) + Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S) \end{cases}$$

et

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ \quad S \quad \longmapsto \operatorname{rem}_{X^r}(S) + Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S) \end{cases}.$$

On note $\mathscr{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

a) Pour tout $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\xi(U + X^r V)$ et $\psi(U + X^r V)$.
b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\xi)$ et $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)$.
c) Montrer que ψ est un automorphisme.
d) Exprimer $\tilde{f}$ en fonction de ξ et ψ.

26. Montrer que : $\operatorname{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) = b_r^q \det(f)$.

Partie VI : autre preuve de l'assertion (1)

27. Soient $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

b) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

28. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Démontrer que le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{R}[X]$.

29. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dont on écrira les éléments sous la forme : $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Soit $\theta\colon \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} \end{cases}.$

a) Démontrer que θ est une application $\mathbb{R}-$linéaire et que θ commute avec tous les endomorphismes de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

b) Que vaut $\theta \circ \theta$?

c) Soit $v \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ non nul. Démontrer que v et $\theta(v)$ sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{C}$) et que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ est stable par θ (où $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ engendré par v et $\theta(v)$).

d) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par θ et soit $v \notin E$.
Démontrer que : $E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

30. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.
On désigne par E_λ le sous-espace propre associé et par E'_λ le sous-espace caractéristique associé.

a) Démontrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ et que : $\theta(E'_\lambda) = E'_{\overline{\lambda}}$.

b) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\dim_{\mathbb{C}} E'_\lambda$ est paire.

31. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$.

FIN DU SUJET