



**MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Concours interne de l'agrégation et CAER - PA

Section mathématiques

Programme de la session 2021

(programme pages suivantes)

Les épreuves écrites et orales de l'agrégation interne et du CAERPA (section mathématiques) portent sur :

- tous les **programmes de l'enseignement secondaire** en vigueur, de la classe de seconde à la terminale incluse, et dans toutes les sections ;
- le **programme complémentaire** défini ci-après.

PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1 Ensembles et logique

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Applications. Relations d'ordre.

Ensemble \mathbf{N} des entiers naturels. Ensembles dénombrables. Dénombrabilité de l'union d'une suite d'ensembles dénombrables.

Relations d'équivalence et ensemble quotient.

2 Algorithmique et informatique

Notions de variable et de type. Instructions d'affectation, conditionnelles, d'itération.

Fonctions et procédures (ou sous-programmes) : définition, passage de paramètre, variables locales, notion de récursivité. Rédaction en français ou dans un langage au choix du candidat de programmes ne comportant qu'un faible nombre d'instructions et pouvant utiliser des fonctions (ou sous-programmes).

Aucun développement théorique n'est exigé.

Exemples d'algorithmes illustrant les notions figurant dans le présent programme.

3 Algèbre générale

3.1 Extensions successives de la notion de nombre

Anneau \mathbf{Z} des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs et idéaux de \mathbf{Z} . Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bachet-Bézout. Algorithme d'Euclide étendu. Congruences. Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes $ax + by = c$.

Corps \mathbf{Q} des nombres rationnels, \mathbf{R} des nombres réels, \mathbf{C} des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

Non-dénombrabilité de \mathbf{R} .

Groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines n -ièmes de l'unité. Relations d'inclusion entre ces groupes. Polygones réguliers.

3.2 Anneaux et corps

Définition (les anneaux sont supposés unitaires par définition). Formule du binôme pour des éléments commutables. Idéaux d'un anneau commutatif. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Morphismes d'anneaux. Isomorphisme entre $\text{Im}(f)$ et $A/\text{Ker}(f)$ pour f morphisme d'anneaux de A dans A' .

Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications.

Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Éléments algébriques, transcendants sur un sous-corps. Dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur \mathbf{Q} .

3.3 Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif K

Algèbre $K[X]$. Division euclidienne. Idéaux de $K[X]$. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en produit de facteurs irréductibles.

Fonctions polynômes. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles sur \mathbf{R} et \mathbf{C} .

Dérivation des polynômes. Identité de Taylor lorsque la caractéristique est nulle.

3.4 Fractions rationnelles sur un corps commutatif K

Corps $K(X)$ des fractions rationnelles. Forme irréductible. Fonctions rationnelles, zéros, pôles, ordre de multiplicité des zéros et pôles.

Décomposition en éléments simples. Cas où le corps est \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

Exemples simples de problèmes d'élimination ; applications à la géométrie.

4 Groupes et géométrie

Les diverses notions sur les groupes ont vocation à être illustrées dans des situations géométriques (par exemple, isométries d'un tétraèdre régulier, d'un cube, etc.).

Groupes, morphismes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques, ordre d'un élément.

Théorème de Lagrange.

Sous-groupe distingué (ou normal). Groupe quotient.

Image et noyau d'un morphisme de groupes. Isomorphisme entre $\text{Im}(f)$ et $G/\text{Ker}(f)$ pour f morphisme de groupes de G dans G' .

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Stabilisateurs. Formule des classes. Éléments conjugués, classes de conjugaison, sous-groupes conjugués. Automorphismes intérieurs d'un groupe.

Polygones réguliers et groupes diédraux.

Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique ; cycles, génération par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné.

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K .

Groupes $O(E)$ et $SO(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien. Groupes $U(E)$ et $SU(E)$ où E est un espace hermitien. Groupe affine, groupe des homothéties et translations d'un espace affine. Groupe des isométries et des déplacements d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace. Groupe des similitudes directes et indirectes d'un plan affine euclidien.

5 Algèbre linéaire sur un corps commutatif K

5.1 Espaces vectoriels et algèbres

Définitions. Applications linéaires. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$. Algèbre $\mathcal{L}(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$. Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Espaces vectoriels quotients.

Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs.

Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.

Étant donné u de $\mathcal{L}(E, F)$, isomorphisme entre $\text{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, isomorphisme entre $\text{Im}(u)$ et $E/\text{Ker}(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

5.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Dimension du quotient E/F lorsque F est un sous-espace vectoriel de E . Rang d'une famille de vecteurs.

Existence de supplémentaires.

Formule liant les dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation des automorphismes.

5.3 Matrices

Espaces $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K . Isomorphisme canonique avec $\mathcal{L}(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Taille maximale des sous-matrices carrées inversibles d'une matrice donnée. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace muni d'une base, matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

5.4 Systèmes d'équations linéaires et opérations élémentaires

Systèmes d'équations linéaires, matrice associée. Systèmes de Cramer. Applications à des problèmes de géométrie.

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.

Application des opérations élémentaires à la résolution de systèmes linéaires, au calcul du rang et à l'inversion de matrices (méthode du pivot de Gauss).

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, K)$ et $SL(n, K)$.

5.5 Déterminants

Dimension de l'espace des formes n -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n .

Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'une composée d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Comatrice. Formules de Cramer. Orientation d'un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calcul de volumes.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n, K)$.

5.6 Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équations d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E . Base duale d'une base. Application aux polynômes d'interpolation de Lagrange. Bijection, à l'aide de l'orthogonalité, entre l'ensemble des sous-espaces de E et l'ensemble des sous-espaces de E^* . Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Rang de la transposée.

5.7 Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ; endomorphismes diagonalisables.

Algèbre $K[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E . Polynôme annulateur, polynôme minimal. Décomposition des noyaux.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, lorsque le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Sous-espaces caractéristiques. Théorème de Cayley-Hamilton.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Décomposition de Dunford : lorsque le polynôme caractéristique est scindé, existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes linéaires, systèmes différentiels linéaires, etc.).

5.8 Cas où le corps K est \mathbf{R} ou \mathbf{C}

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $\mathcal{L}(E)$.

Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Exemples de parties denses de $\mathcal{L}(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$; si $K=\mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

5.9 Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel. Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

6 Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne

Les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

6.1 Espaces euclidiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire; norme euclidienne. Identité du parallélogramme. Isomorphisme canonique avec le dual. Orthogonalité. Bases orthonormales. Orthonormalisation de Schmidt. Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales. Adjoint d'un endomorphisme et matrice associée dans une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$ et spécial orthogonal $SO(E)$. Génération de $O(E)$ par les réflexions orthogonales (ou symétries orthogonales par rapport à un hyperplan).

Endomorphismes symétriques, réduction dans une base orthonormale. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive. Application aux éléments de symétrie des coniques et quadriques dans un espace euclidien. Ellipsoïde d'inertie. Application à l'analyse des données.

Application à l'étude d'une surface au voisinage d'un point régulier.

Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

6.2 Angles

Groupe $SO(2)$, sa commutativité, angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π . Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de \mathbf{R} vers $SO(2)$. Mesure des angles.

Angles orientés de droites en dimension 2.

Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de $SO(E)$ par les demi-tours (retournements).

Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

6.3 Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

6.4 Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte.

6.5 Espaces hermitiens

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales. Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale. Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire $U(E)$ et spécial unitaire $SU(E)$.

Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

7 Géométrie affine réelle en dimension finie

Définition d'un espace affine réel. Espace vectoriel associé. Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine. Droites, plans, hyperplans.

Repères. Orientation. Volume algébrique d'un parallélépipède orienté.

Applications affines. Projecteurs. Groupe affine. Isomorphisme entre le stabilisateur d'un point et le groupe linéaire. Symétries. Groupe des homothéties et translations. Effet d'une application affine sur les volumes.

Barycentres. Repères et coordonnées barycentriques. Isobarycentre.

Parties convexes. Intersection, images directe et réciproque par une application affine. Enveloppe convexe d'une partie. Exemples de problèmes d'optimisation.

8 Géométrie affine euclidienne orientée

8.1 Préliminaires

Pour toutes les situations géométriques, on distinguera les propriétés de caractère affine et celles de nature métrique (ou euclidienne), ainsi pour les coniques ou pour certaines notions différentielles (tangentes, normales, courbure, etc.).

Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

8.2 Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.

Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.

Décomposition canonique d'une isométrie en $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et f une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.

Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.

Groupe des similitudes affines du plan.

8.3 Géométrie plane

Propriétés angulaires du cercle (angles au centre, angles inscrits) et applications.

Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.

Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct, équations de droites et de cercles. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles. Orthogonalité entre cercles.

8.4 Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification affine : ellipse, parabole, hyperbole. Équations polaires des coniques propres lorsque l'origine est en un foyer. Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.

Sections planes d'un cône de révolution.

Trajectoire parabolique d'un objet pesant dans un champ de pesanteur. Mouvement à accélération centrale, notions sur le mouvement des planètes.

9 Analyse réelle et complexe

9.1 Nombres réels, nombres complexes

Corps \mathbf{R} des nombres réels et \mathbf{C} des nombres complexes.

Suites convergentes, divergentes, suites extraites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites.

Toute partie non vide majorée de \mathbf{R} possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes, théorème des segments emboîtés. Droite numérique achevée.

Complétude de \mathbf{R} : toute suite de Cauchy de \mathbf{R} converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de \mathbf{R} on peut extraire une sous-suite convergente. Extension de ces résultats à \mathbf{C} .

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Suites définies par une relation de récurrence linéaire à deux termes et à coefficients constants, ou par une relation homographique.

9.2 Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Étude de la convergence par utilisation des relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann.

Critère de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

9.3 Continuité

Fonctions définies sur une partie de \mathbf{R} . Limites, continuité à droite, à gauche, continuité.

Relations de comparaison entre fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini : prépondérance, négligeabilité, équivalence. Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrêmes. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction f continue strictement monotone sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1} .

Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass).

9.4 Dérivabilité

Dérivée à droite, à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.

Dérivées successives. Fonctions de classe \mathcal{C}^k , de classe \mathcal{C}^k par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k -ième d'un produit. Composition de fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Fonctions convexes de classe \mathcal{C}^1 , convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

Formules de Taylor avec reste intégrale, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Étude locale des fonctions. Condition nécessaire d'extrémum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.

9.5 Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions parmi les fonctions continues. Fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Fonctions circulaires directes et réciproques.

9.6 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition de l'intégrale de Riemann, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.

Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

9.7 Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme.

9.8 Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont supposées continues par morceaux sur l'intervalle I de définition, c'est-à-dire continues par morceaux sur tout segment contenu dans I .

Intégrale d'une fonction positive (comme borne supérieure, éventuellement infinie, des intégrales sur les segments inclus dans I). Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie. Les trois théorèmes suivants sont admis :

Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions intégrables, convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I . Alors f est intégrable sur I si, et seulement si, la suite des intégrales des f_n est majorée ; en ce cas, l'intégrale de f est la limite de celles des f_n .

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I . Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I , alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n .

Théorème d'intégration terme à terme : Soit une suite (u_n) de fonctions à valeurs complexes, intégrables sur I , telle que la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I , et telle que la série $\sum \int_I |u_n|$ converge. Alors S est intégrable sur I et on a $\int_I S = \sum_n \int_I u_n$.

9.9 Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy.

Convergence absolue, lien avec l'intégrabilité. Emploi des relations de comparaison, de l'intégration par parties pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence. Pour une fonction f définie sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, comparaison entre la convergence de la série de terme général $f(n)$ ($n \geq a$) et l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ (méthode des rectangles). Si f est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$, alors la série de terme général $f(n) - \int_{[n, n+1]} f(t) dt$ converge.

9.10 Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorème de continuité : Soient X un ouvert de \mathbf{R}^n , I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. On suppose que, pour tout t dans I , la fonction partielle $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X et que, pour tout x dans X , la fonction partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I . S'il existe une fonction g intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I , $|f(x, t)| \leq g(t)$, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est continue sur X .

Théorème de dérivation : Soient X et I deux intervalles ouverts de \mathbf{R} et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes, telle que, pour tout x dans X , la fonction partielle $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I . On suppose que f admet une dérivée partielle $f'_x(x, t)$ en tout point de $X \times I$, que pour tout t dans I , la fonction $x \mapsto f'_x(x, t)$ est continue sur X . S'il existe une fonction h intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I , $|f'_x(x, t)| \leq h(t)$, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x, t)$ sur I est dérivable sur X et on a $F'(x) = \int_I f'_x(x, t) dt$.

Application des théorèmes précédents à la fonction Gamma d'Euler, à la transformée de Fourier, à la transformée de Laplace.

9.11 Analyse numérique

Approximations d'un nombre par des suites : vitesse de convergence, ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg.

Approximation d'une solution d'une équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur.

Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur. Recherche d'une valeur approchée de la somme de certaines séries convergentes ; majoration de l'erreur.

Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente.

Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

9.12 Séries entières

Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence. Exemples de calcul du rayon de convergence. Rayon de convergence de la série dérivée.

Séries génératrices, applications à des problèmes de dénombrement et probabilités.

Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence. Sur le disque ouvert de convergence, la limite du taux d'accroissement complexe de la somme est la somme de la série dérivée.

Série de Taylor d'une fonction de variable réelle de classe \mathcal{C}^∞ . Notion de fonction développable en série entière par rapport à une variable réelle ou complexe, exemples.

Exponentielle complexe, exponentielle d'une somme, nombre π , fonctions sinus et cosinus.

Lien avec la mesure des angles.

10 Topologie et analyse fonctionnelle

10.1 Topologie des espaces métriques

Distance, boules ouvertes, boules fermées. Parties ouvertes, parties fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques. Normes usuelles sur les espaces \mathbf{R}^n , \mathbf{C}^n .

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Applications d'un espace métrique dans un autre, continuité en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur une partie, caractérisation par les images réciproques des ouverts ou des fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

10.2 Espaces vectoriels normés sur \mathbf{R} ou \mathbf{C}

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations (addition, multiplication par un scalaire). Applications linéaires continues, normes de ces applications. Applications multilinéaires continues.

10.3 Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de \mathbf{R} et \mathbf{C} . Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de \mathbf{R}^n et \mathbf{C}^n .

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues sur un compact.

10.4 Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de \mathbf{R} . Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

10.5 Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de \mathbf{R} et \mathbf{C} .

Méthode des approximations successives, théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui-même.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

10.6 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

10.7 Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence.

Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

10.8 Espaces préhilbertiens

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace. Inégalité de Bessel.

Espaces de Hilbert.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.

10.9 Séries de Fourier

Polynômes trigonométriques, orthonormalité des fonctions $x \mapsto e^{inx}$. Coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$ d'une fonction 2π -périodique f continue par morceaux. Sommes partielles

$$S_n(f, x) = \sum_{-n \leq k \leq n} c_k(f) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$$

Meilleure approximation en moyenne quadratique. Identité de Parseval et convergence en moyenne quadratique si f est continue par morceaux.

Théorèmes de convergence de Dirichlet et Fejer ; approximation uniforme d'une fonction continue et périodique par des polynômes trigonométriques (Weierstrass). Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

11 Géométrie différentielle

Les notions qui suivent doivent être illustrées par des exemples.

11.1 Courbes paramétrées en dimension 2 et 3

Étude locale d'une courbe paramétrée du plan. Changement birégulier de paramètre. Tangente, concavité, forme d'un arc au voisinage d'un point régulier ou singulier. Construction d'une courbe en coordonnées polaires.

Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace. Plan osculateur.

11.2 Propriétés métriques des courbes

Longueur d'un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . Abscisse curviligne. En dimension 2, repère de Frenet. Courbure, centre de courbure, cercle osculateur.

11.3 Modélisation géométrique

Polynômes de Bernstein et courbes de Bézier (définies par points de contrôle ou par un algorithme).

12 Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de \mathbf{R}^n à valeurs dans \mathbf{R}^p .

12.1 Fonctions différentiables

Dérivée selon un vecteur. Développement limité à l'ordre 1. Différentiabilité en un point. Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Matrice jacobienne, déterminant jacobien. Différentielle d'une fonction composée. Inégalité des accroissements finis sur un ouvert convexe (admise).

Une fonction f définie sur un ouvert Ω est dite de classe \mathcal{C}^1 si l'application qui à tout point a de Ω fait correspondre la différentielle de f en a est continue.

Théorème : pour qu'une fonction soit de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω , il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur Ω .

Composition des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Caractérisation des constantes parmi les fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert connexe.

Applications de classe \mathcal{C}^k . Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

Gradient d'une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 . Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Extrémums locaux d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 de deux variables en un point où $rt - s^2 \neq 0$. Exemples de problèmes d'extrémums issus de la géométrie.

Difféomorphismes. Théorèmes (admis) d'inversion locale et des fonctions implicites. Application à la caractérisation des \mathcal{C}^k -difféomorphismes parmi les fonctions injectives de classe \mathcal{C}^k .

12.2 Équations différentielles

12.2.1 Équations différentielles linéaires

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (resp. \mathbf{C}^n).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. Méthode de la variation des constantes.

Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A , ou au moyen de l'exponentielle de tA , t réel.

Équations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy; solution de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

12.2.2 Notions sur les équations différentielles non linéaires

Solutions d'une équation $x' = f(t, x)$, ou $x'' = f(t, x, x')$, où f est de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 . Théorème (admis) de Cauchy-Lipschitz dans le cas \mathcal{C}^1 : existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables ou homogènes; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique (oscillateurs harmoniques, mouvement du pendule, chute des corps, mouvement des planètes) et en géométrie différentielle (trajectoires dans un champ de vecteurs).

13 Calcul intégral et probabilités

13.1 Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force.

Formule de Fubini et définition de l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Adaptation à l'intégrale triple.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive sur un rectangle borné ou non, on peut intervertir l'ordre des intégrations; lorsque la valeur commune de ces intégrales est finie, f est dite intégrable et son intégrale double est cette valeur commune.

Si f est une fonction complexe de deux variables continue sur un rectangle borné ou non, on dit que f est intégrable si son module est intégrable. Dans ce cas, on peut intervertir l'ordre des intégrations et l'intégrale de f est la valeur commune des deux intégrales superposées.

Extension des résultats précédents au cas de fonctions de plusieurs variables.

Extension au cas du produit d'une fonction de plusieurs variables continue positive par une fonction indicatrice d'un ensemble «géométriquement simple». Linéarité et additivité relativement à la fonction et relativement aux ensembles.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

13.2 Modélisation d'une expérience aléatoire

Espace Ω des épreuves (ou des événements élémentaires); tribu (ou σ -algèbre) \mathcal{F} des événements; mesure de probabilité P sur cette tribu. Étude d'exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.

13.3 Espace probabilisé

Propriétés d'une probabilité. Probabilité conditionnelle $P_B(A)$ de A sachant B si $P(B)$ est non nul. Formule des probabilités composées (ou totales) et formule de Bayes. Indépendance d'un ensemble fini d'événements.

13.4 Variables aléatoires réelles

Étant donné un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r. en abrégé) toute application X de Ω dans \mathbf{R} telle que l'image réciproque $X^{-1}(I)$ de tout intervalle I de \mathbf{R} appartienne à la tribu \mathcal{F} . On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..

On se bornera à l'étude des deux familles suivantes de v.a.r. :

13.4.1 Variables aléatoires réelles discrètes

Une v.a.r. est dite discrète si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs. Loi et fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. Moments d'une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart-type. Espérance d'une somme de v.a.r. discrètes. Théorème de transfert (espérance de la v.a.r. $\Phi(X)$ où Φ est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X). Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans \mathbf{N} . Lois discrètes usuelles : loi hypergéométrique, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique et loi de Poisson.

13.4.2 Variables aléatoires réelles possédant une loi avec densité

On appelle densité de probabilité sur \mathbf{R} toute fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R}_+ intégrable sur \mathbf{R} et d'intégrale égale à 1 (on se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe 9.8).

Soit f une densité de probabilité sur \mathbf{R} . On dit qu'une v.a.r. X possède la loi de densité f si, pour tout intervalle I de \mathbf{R} , $P(\{X \in I\}) = \int_I f(x) dx$.

Fonction de répartition et moments; espérance, variance et écart-type d'une v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance d'une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis). Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné, loi exponentielle, loi de Cauchy, loi normale, loi Gamma à un paramètre.

On admettra le résultat suivant (théorème de transfert) : si X est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur \mathbf{R} , alors $\Phi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $E(\Phi(X)) = \int_{\mathbf{R}} \Phi(x)f(x) dx$.

13.5 Vecteurs aléatoires

On dira qu'une application $X = (X_1, \dots, X_p)$ de Ω dans \mathbf{R}^p est un vecteur aléatoire si chacune de ses composantes est une v.a.r. On se limitera aux deux cas suivants :

13.5.1 Vecteurs aléatoires discrets

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_p)$ de Ω dans \mathbf{R}^p est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.

Loi d'un vecteur aléatoire X . Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.

13.5.2 Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité

On appelle densité de probabilité sur \mathbf{R}^p toute fonction f de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R}_+ , intégrable sur \mathbf{R}^p et d'intégrale égale à 1 (on se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe 13.1). Soit f une densité de probabilité sur \mathbf{R}^p . On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_p)$ possède la loi de densité f si on a, pour tous intervalles I_1, \dots, I_p de \mathbf{R} ,

$$P(\{X_1 \in I_1\} \cap \dots \cap \{X_p \in I_p\}) = \int_{I_1} \dots \int_{I_p} f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p .$$

Soit $X = (X_1, \dots, X_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f . Soit Ψ un produit d'une fonction continue de \mathbf{R}^p dans \mathbf{R} par une fonction indicatrice d'un domaine géométriquement simple de \mathbf{R}^p et telle que la fonction $|\Psi|f$ soit intégrable sur \mathbf{R}^p . On admettra que $\Psi(X)$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par :

$$E(\Psi(X)) = \int_{\mathbf{R}^p} \dots \int_{\mathbf{R}^p} \Psi(x_1, \dots, x_p) f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p .$$

Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité. Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possédant une loi avec densité. Application aux loi normales.

13.6 Théorèmes limites

Suites de v.a.r. indépendantes. Notions de convergence en loi, en probabilité, presque sûre.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

Lemme de Borel-Cantelli.

Les résultats suivants sont admis : loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possédant une espérance, théorème central limite pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.

Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et par la loi normale.

13.7 Estimation

Estimation ponctuelle : n -échantillon d'une variable aléatoire; estimateur, biais d'un estimateur, estimateur asymptotiquement sans biais; estimateur convergent, risque quadratique; moyenne empirique, variance empirique.

Estimation par un intervalle : intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique.

Estimation du paramètre d'une loi de Bernoulli.

Application : méthode de Monte-Carlo pour le calcul approché d'une intégrale ou d'une somme de série.